Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Caraş-Severin

REVISTA DE MATEMATICĂ

A ELEVILOR ŞI PROFESORILOR

DIN JUDEŢUL CARAŞ-SEVERIN

Nr. 29, An X-2009

Editura „Neutrino”
Reşiţa, 2009

Titlul: Revista de matematică a elevilor şi profesorilor din judeţul Caraş-Severin
I.S.S.N. 1584-9481

Mobil: 0741017700
www.neutrino.ro
E-mail: editura@neutrino.ro

CUPRINS

Citate

☼ Există întrebări pe care ni le punem nu pentru a da un răspuns, ci pentru a auzi întrebarea.

Octavian Paler

☼ Am avut norocul să aflu că dragostea este unicul adevăr important şi absolut, într-o viață care nu ne dă decât daruri relative. Şi n-am fost ipocrit. Am iubit şi eu.

Octavian Paler

☼ Există înfrângeri care nu coboară, ci înalță.

Octavian Paler

☼ Eternitatea nu poate fi smulsă zeilor decât clipă de clipă.

Octavian Paler

☼ Omul are impresia că vorbeşte cu lumea întreagă la calculator.El e de fapt singur.

Octavian Paler

☼ Eu nu consider modestia o virtute. O invocă, în genere, indivizii cu însuşiri mediocre pentru a lăsa impresia că mediocritatea ține loc de modestie, nu de lipsa lor de calități.

Octavian Paler

☼ Nu există pustiu, ci doar incapacitatea noastră de a umple golul în care trăim.

Octavian Paler

☼ Cred că n-am fost fericit decât în clipa în care am putut spune şi eu, ca orice om, că am iubit. Nu ca scriitor am fost fericit, şi nici ca gazetar.

Octavian Paler

☼ Ceea ce nu trăim la timp nu mai trăim niciodată.

Octavian Paler

☼ Am învățat că indiferent cât de bun îți este un prieten, oricum te va răni din când în când... Iar tu trebuie să-l ierți pentru asta.

Octavian Paler

☼ Nimic durabil nu se poate întemeia pe indiferență.

Octavian Paler

Abordări geometrice ale unor probleme cu numere complexe

Steluța și Mihai Monea – Deva

Acest articol are un caracter metodic. Scopul său este de a pune în evidență aspectele geometrice ale numerelor complexe chiar și în situații în care problemele au atât ipoteza cât și concluzia cu conținut algebric. Sunt însă necesare câteva noțiuni teoretice pentru început.

Două numere complexe vor fi utile. Este vorba de $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, una dintre rădăcinile de ordinul 3 ale unității și $\omega=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, una dintre rădăcinile de ordinul 6 ale unității. Printre proprietățile cunoscute reamintim $\varepsilon^3=1,\quad \varepsilon^2+\varepsilon+1=0$ sau $\omega^3=-1, \omega^2-\omega+1=0$ și $\omega^2=\varepsilon$. De asemenea considerăm cunoscute formulele uzuale cu conținut geometric cum ar fi distanța dintre două puncte, afixul mijlocului unui segment sau condiția ca 4 puncte să formeze un paralelogram. Apoi enumerăm, fără demonstrație câteva dintre formulele în care intervin punctele importante ale unui triunghi grupate în:

Propoziția 1: Fie ΔABC, în care notăm cu G centrul de greutate, H ortocentrul, iar Q centrul cercului circumscris. Notând cu a,b,c,g,h,q afixele corespunzătoare atunci au rol relațiile:

a) $a+b+c=3g$;

b) $h+2q=3g$;

c) $a+b+c=2q+h$

d) Triunghiul ABC (notat în sens trigonometric) este echilateral dacă și numai dacă $b=a\varepsilon, c=a\varepsilon^2$. ■

Cu această introducere vom pune în evidență două rezultate cunoscute, care vor fi deosebit de utile în demersul nostru ulterior, cu mențiunea că peste tot vom nota originea sistemului cu O.

Lema 2: Se consideră numerele complexe distincte a,b,c egale în modul, cu proprietatea că $a+b+c=0$. Demonstrați că punctele $A(a),B(b),C(c)$ formează un triunghi echilateral.

Demonstrație: Vezi problema 4, punctul a) OJM/2009. ■

Lema 3: Se consideră numerele complexe a,b,c,d egale în modul cu proprietatea că $a+b+c+d=0$. Atunci punctele $A(a), B(b), C(c), D(d)$ sunt vârfurile unui dreptunghi cu centrul în origine.

Demonstrație: Fie $A(a),B(-b),C(c),D(-d)$ și O originea. Atunci $OA=OB=OC=OD$ deci A,B,C,D sunt conciclice. Din $a+c=-b-d$ deducem că $ABCD$ este paralelogram, deci dreptunghi cu centrul în O.

Problema 1: Fie $a,b,c\in\mathbb{C}$ astfel încât $|a+b|=|c|$, $|a+c|=|b|$ și $|b+c|=|a|$. Atunci $a+b+c=0$. *(Gazeta Matematică)*

Soluție: Fie punctele $A(a),B(b),C(c), M(b+c), N(a+c), P(a+b)$ și O originea sistemului. Ipoteza devine $OA=OM$, $OB=ON$ și $OC=OP$. Fie S,T,U mijloacele segmentelor AM,BN,CP. Atunci deducem că $S=T=U$ deoarece au același afix, $\frac{a+b+c}{2}$. Presupunem $S\neq O$. Dar în $\triangle OAM$ isoscel deducem $OS\perp AM$. Analog $OS\perp BN, OS\perp CP$ ceea ce înseamnă că am construit mai multe perpendiculare în O pe OS ceea ce nu e posibil. Rămâne atunci $S=O$ adică $a+b+c=0$. ■

Problema 2: Fie $a,b,c\in\mathbb{C}$ cu $|a|=|b|=|c|=1$ și $a+b+c=1$. Calculați $\frac{1}{a^{1997}}+\frac{1}{b^{1997}}+\frac{1}{c^{1997}}$.*(Gazeta Matematică)*

Soluție: Fie punctele $A(a),B(b),C(d),D(-1)$. Din lema 3 deducem că punctele A,B,C,D formează un dreptunghi cu centrul în O. Prin urmare avem $a+c=0$ și $b-1=0$ sau altă situație obținută prin permutare. Atunci $c=-a, b=1$ și evident $\frac{1}{a^{1997}}+\frac{1}{b^{1997}}+\frac{1}{c^{1997}}=1$. ■

Problema 3: Fie $a,b,c\in\mathbb{C}$ cu $|a|=|b|=|c|=1$ și $a+b+c\neq 0$. Dacă $a^2+b^2+c^2=0$ demonstrați că $|a^3+b^3+c^3|=1$.(Gazeta Matematică)

Soluție: Se aplică lema 1 pentru numerele a^2,b^2,c^2 și atunci triunghiul de vârfuri $A(a^2), B(b^2), C(c^2)$ este echilateral și din

propoziția 1, d) deducem că $b^2 = a^2\varepsilon = a^2\omega^2$ și $c^2 = \varepsilon^2 a^2 = \omega^4 a^2$. Atunci $b = \pm\omega a,\ c = \pm\omega^2 a$. Atunci $a+b+c = a\left(1\pm\omega\pm\omega^2\right) \neq 0$. Deducem că sunt posibile cazurile $b=\omega a,\ c=\omega^2 a$ sau $b=-\omega a,\ c=-\omega^2 a$ sau $b=\omega a,\ c=-\omega^2 a$. În primul deducem că $a^3+b^3+c^3 = a^3 + a^3\omega^3 + a^3\omega^6 = a^3$ și $\left|a^3+b^3+c^3\right| = 1$. Celelalte se tratează analog. ■

Problema 4: Fie $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ cu $|a|=|b|=|c|=|d|$ și cu proprietatea că $a+b+c+d=0$. Demonstrați că $a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}+d^{2009}=0$. *(Gazeta Matematică)*

Soluție: Fie punctele $A(a), B(b), C(d), D(d)$. Din lema 3 deducem că ele formează un dreptunghi cu centrul în O deci , de exemplu, $a+c=b+d=0$. Acum concluzia este evidentă deoarece puterea este impară. ■

Problema 5: Fie $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ și $z \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că $|z-\alpha| + |z+\overline{\alpha}| = |z-i|$. Calculați $|z|$. *(Gazeta Matematică)*

Soluție: Fie $A(i), B(\alpha), C(-\overline{\alpha})$ și $M(z)$. Prin calcul se deduce că $\triangle ABC$ este echilateral. Atunci ipoteza devine $MB+MC=MA$. Atunci în patrulaterul cu vârfurile M,A,B,C are loc relația $MB\cdot BC + MC\cdot AB = MA\cdot BC$ deci este inscriptibil, de unde deducem că $OA=OM$ deci $|z| = OM = OA = |i| = 1$. ■

Problema 6 : Fie $a,b,c \in \mathbb{C}$ cu $|a|=|b|=|c|$ și $a+b=c$. Calculați $a^{2006}+b^{2006}+c^{2006}=0$ *(Gazeta Matematică)*

Soluție: Se aplică lema 2 pentru numerele $a,b,-c$ și atunci $b=\varepsilon a,\ c=-\varepsilon^2 a$ și $a^{2006}+b^{2006}+c^{2006} = a^{2006}\left(1+\varepsilon^{2006}+\varepsilon^{4012}\right)=0$. ■

Problema 7: Fie $a,b,c \in \mathbb{C}$ cu $|a|=|b|=|c|=|a+b+c|=1$. Calculați $\left|\frac{1}{a^{2007}}+\frac{1}{b^{2007}}+\frac{1}{c^{2007}}\right|$. *(Gazeta Matematică)*

Soluție: Fie $A(a), B(b), C(c)$. Dacă notăm cu $H(h)$ ortocentru $\triangle ABC$ atunci ipoteza devine $|a|=|b|=|c|=|h|=1$, adică $OA=OB=OC=OH$. Deci H aparține cercului circumscris $\triangle ABC$ ceea ce e posibil doar în

triughiul dreptunghic. Deducem atunci că, de exemplu BC este diametrul cercului care conduce la $b+c=0$ și atunci $\left|\frac{1}{a^{2007}}+\frac{1}{b^{2007}}+\frac{1}{c^{2007}}\right| = \left|\frac{1}{a^{2007}}\right| = 1$. ■

Problema 8: Să se rezolve în $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ sistemul:

$$\begin{cases} |z_1+z_2| = |z_1+z_3| = |z_2+z_3| = \frac{2}{3} \\ z_1+z_2+z_3 = 1 \end{cases}$$ *(OJ Hunedoara - 2003)*

Soluție: Prima ecuație se rescrie $\left|\frac{z_1+z_2}{2}\right| = \left|\frac{z_1+z_3}{2}\right| = \left|\frac{z_2+z_3}{2}\right| = \frac{1}{3}$ Fie $a=\frac{z_1+z_2}{2}$, $b=\frac{z_1+z_3}{2}$ și $c=\frac{z_2+z_3}{2}$. Atunci sistemul devine $|a|=|b|=|c|=\frac{1}{3}$ și $a+b+c=1$. Dacă considerăm punctele $A(a), B(b), C(c)$ și g afixul centrului de greutate al $\triangle ABC$, deducem că $g=\frac{1}{3}$ și ajungem la concluzia că $OA=OB=OC=OG$ ceea ce nu este posibil decât dacă $A=B=C=G$ adică $a=b=c$ ceea ce conduce la $z_1=z_2=z_3=\frac{1}{3}$. ■

Problema 9: Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1-z_2| = |z_1| = |z_2| = r$. Calculați $\left|z_1^{2003}+z_2^{2003}\right|$. *(OJ Mehedinți - 2003)*

Soluție: Fie punctele $A(z_1), B(z_2)$. Ipoteza devine $OA=OB=AB$. Deci $\triangle OAB$ este echilateral. Atunci avem $z_2=\omega z_1$ și $\left|z_1^{2003}+z_2^{2003}\right| = r^{2003}\left|1+\omega^{2003}\right| = r^{2003}|1-\omega| = r^{2003}\left|\omega^2\right| = r^{2003}$. ■

Bibliografie

[1] Colecția revistei Gazeta Matematică – ediția electronică

[2] Colecția Revistei de Matematică a elevilor din Timişoara – ediția electronică

[3] T. Andreescu, D. Andrica - Complex Numbers from A to Z, Ed. Birkhauser

[4] L. Hahn - Complex Numbers and Geometry. MAA

Profesori, C.N. Decebal Deva

Puncte importante în triunghi (IV)
Centrul cercului înscris

Marina Constantinescu
Mircea Constantinescu

Prezentăm acum un alt punct care joacă un rol important în geometria triunghiului, şi anume centrul cercului înscris în triunghi. Este cunoscut următorul rezultat:

Teorema 1. Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sunt concurente într-un punct egal depărtat de laturile triunghiului.

Definiţie. Punctul de intersecţie a bisectoarelor unghiurilor unui triunghi se numeşte centrul cercului înscris triunghiului.

Un rezultat util este dat în următoarea propoziţie:

Propoziţia 1. Dacă S, r, p sunt aria, raza cercului înscris, respectiv semiperimetrul unui triunghi, atunci $S = r \cdot p.$

Demonstraţie. Fie I centrul cercului înscris într-un triunghi ABC şi M, N, P proiecţiile punctului I pe $[BC],[CA]$ respectiv $[AB]$. Atunci $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AIB} + S_{\triangle BIC} + S_{\triangle CIA} = \frac{IP \cdot AB}{2} + \frac{IM \cdot BC}{2} + \frac{IN \cdot CA}{2}.$

Cum $IM = IN = IP = r$, se obţine că $S_{\triangle ABC} = r \cdot p,$ unde $p = \frac{AB + BC + CA}{2}.$

De asemenea este util următorul rezultat:

Propoziţia 2. Se consideră un triunghi ABC cu laturile de lungimi $BC = a, CA = b, AB = c.$ Fie M, N, P punctele de contact ale cercului înscris triunghiului ABC cu laturile BC, CA, respectiv $AB.$ Atunci $AP = p - a, BM = p - b, CN = p - c,$ unde $p = \frac{a+b+c}{2}.$

Demonstraţie. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Atunci IB este bisectoarea unghiului ABC, iar $IM \perp BC, IP \perp AB.$ Atunci $\triangle IPB \equiv \triangle IMB (I.U.)$, deci $BM = BP.$ Analog $CM = CN$ şi $AN = AP.$ Cum $BM + MC = a, CN + NA = b, AP + PB = c$, se obţine prin însumare că $(BM + BP) + (CM + CN) + (AN + AP) = a + b + c,$ deci $2 \cdot (BM + MC) + 2 \cdot AN = a + b + c,$ deci $AN = \frac{b + c - a}{2} = AP.$ Analog $BM = BP = \frac{a + c - b}{2}$ şi $CM = CN = \frac{a + b - c}{2}.$

Definiţie. Un patrulater convex se numeşte circumscriptibil dacă este circumscris unui cerc.

Teorema 2. Într-un patrulater circumscriptibil, suma lungimilor a două laturi opuse este egală cu suma lungimilor celorlalte două laturi opuse.

Demonstraţie. Fie patrulaterul circumscriptibil $ABCD$ şi M, N, P, Q punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile AB, BC, CD respectiv $DA.$ Raţionând ca în Propoziţia 2, avem $AM = AQ = x, BM = BN = y, CN = CP = z, DP = DQ = t.$ Atunci $AB + CD = x + y + z + t = BC + AD.$

Este cunoscut şi rezultatul următor:

Propoziţia 3. Fie A', B', C' picioarele înălţimilor duse din A, B, respectiv C în triunghiul $ABC, A' \in BC, B' \in AC, C' \in AB.$ Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC, atunci H este centrul cercului înscris în triunghiul $A'B'C'.$

Demonstraţie. Deoarece $m(\sphericalangle HC'B) = m(\sphericalangle HA'B) = 90^\circ$, rezultă că patrulaterul $HC'BA'$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle HBC' \equiv \sphericalangle HA'C' (1).$ Analog patrulaterul $HA'CB'$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle HA'B' \equiv \sphericalangle HCB' (2).$ Cum $m(\sphericalangle BC'C) = m(\sphericalangle BB'C) = 90^\circ$, rezultă că şi patrulaterul $BC'B'C$ este inscriptibil, aşadar $\sphericalangle HBC' \equiv \sphericalangle HCB' (3).$ Din relaţiile $(1), (2)$ şi (3) se obţine că $\sphericalangle HA'B' \equiv HA'C'$, deci $A'H$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle C'A'B'.$ Analog $B'H$ şi $C'H$ sunt bisectoarele unghiurilor $A'B'C'$, respectiv $A'C'B'$, deci H este centrul cercului înscris în triunghiul $A'B'C'.$

Vom prezenta în continuare câteva aplicaţii.

Problema 1. Punctul de intersecţie a medianelor AA_1, BB_1, CC_1 ale triunghiului ABC este centrul cercului înscris în triunghiul $A_1B_1C_1$. Să se arate că triunghiul ABC este echilateral.

Soluție. Centrul cercului înscris este punctul de intersecție a bisectoarelor triunghiului, deci diagonala AA_1 a paralelogramului $AB_1A_1C_1$ (A_1C_1 și A_1B_1 fiind linii mijlocii în triunghiul ABC) este bisectoarea unghiului $B_1A_1C_1$. Deci $AB_1A_1C_1$ este romb, şi atunci $\frac{AB}{2}=A_1B_1=A_1C_1=\frac{AC}{2}$, deci $AB=AC$. Analog $AC=BC$, deci triunghiul ABC este echilateral.

Problema 2. Bisectoarele AD, BE şi CF ale triunghiului ABC se intersectează în punctul O. Să se demonstreze că dacă triunghiurile BOF şi BOD au arii egale, atunci triunghiul ABC este isoscel.

Soluție. Avem $S_{\vartriangle BOF}=\frac{BF\cdot d(O,BF)}{2}, S_{\vartriangle BOD}=\frac{BD\cdot d(O,BD)}{2}$, deci cum $d(O,BF)=d(O,BD)$ se obține că $BF=BD$. Dacă $BC=a, AC=b, AB=c$, din teorema bisectoarei obținem $BD=\frac{a\cdot c}{b+c}, BF=\frac{a\cdot c}{a+b}$, și, din $BD=BF$ rezultă că $a=c$, deci triunghiul ABC este isoscel.

Problema 3. Cercul ω trece prin punctele B şi C şi prin centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Cercul ω intersectează a doua oară dreapta AB în punctul B_1 , iar dreapta AC în punctul C_1. Să se demonstreze că $BB_1=CC_1$.

Soluție. Presupunem fără a restrânge generalitatea că $m(\sphericalangle ABC)\geq m(\sphericalangle ACB)$. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Unghiul dintre dreptele BI și BB_1 are măsura $180^\circ-\frac{m(\sphericalangle ABC)}{2}$, deoarece BI este bisectoarea unghiului ABC și $m(\sphericalangle ABI)=\frac{m(\sphericalangle ABC)}{2}$. Atunci arcul $\overset{\frown}{IBB_1}$ are măsura unghiului ABC. Apoi, deoarece arcul $\overset{\frown}{IB}$ are măsura $2\cdot m(\sphericalangle ICB)=m(\sphericalangle ACB)$, deducem că $m\left(\overset{\frown}{BB_1}\right)=m(\sphericalangle ABC)-m(\sphericalangle ACB)$.

Analog $m\left(\overset{\frown}{CC_1}\right)=m(\sphericalangle ABC)-m(\sphericalangle ACB)$. Aşadar $BB_1=CC_1$.

Problema 4. Diagonalele patrulaterului inscriptibil $ABCD$ se intersctează în punctul E. Fie O_1 centrul cercului înscris în triunghiul ABC, iar O_2 centrul cercului înscris în triunghiul ABD. Fie $\{M\}=O_1O_2\cap BD$ și $\{N\}=O_1O_2\cap AC$. Să se demonstreze că triunghiul EMN este isoscel.

Soluție. Centrul cercului înscris este punctul de intersecție a bisectoarelor, deci $m(\sphericalangle O_1BA)=m(\sphericalangle O_1BC)=\beta, m(\sphericalangle O_1AB)=m(\sphericalangle O_1AC)=\tau$, $m(\sphericalangle O_2BA)=m(\sphericalangle O_2BD)=\alpha$, $m(\sphericalangle O_2AB)=m(\sphericalangle O_2AD)=\gamma$ De aceea $m(\sphericalangle BO_1A)=180^\circ-(\beta+\tau), m(\sphericalangle BO_2A)=180^\circ-(\alpha+\gamma)$, adică $\sphericalangle BO_1A\equiv\sphericalangle BO_2A$, fiidcă $\beta+\tau=\alpha+\gamma\Leftrightarrow 2\cdot\beta-2\cdot\alpha=2\cdot\gamma-2\cdot\tau\Leftrightarrow\sphericalangle CBD\equiv\sphericalangle CAD$ (înscrise, subîntinzând arcul $\overset{\frown}{CD}$). Rezultă că punctele B, O_1, O_2, A sunt conciclice. Dar atunci $m(\sphericalangle MO_1B)=180^\circ-m(\sphericalangle O_2O_1B)=m(\sphericalangle O_2AB)=\gamma$, adică $m(\sphericalangle EMN)=m(\sphericalangle MBO_1)+m(\sphericalangle MO_1B)=2\cdot\alpha-\beta+\gamma$.

Analog $m(\sphericalangle ENM)=m(\sphericalangle NAO_1)+m(\sphericalangle NO_1A)=\tau+m(\sphericalangle O_2BA)=\tau+\alpha$, de unde rezultă că $m(\sphericalangle EMN)=m(\sphericalangle ENM)$, deoarece $2\cdot\alpha-\beta+\gamma=\tau+\alpha$. Deci triunghiul EMN este isoscel.

Problema 5. Punctul O este centrul cercului înscris în patrulaterul $ABCD$. Să se demonstreze că dacă perimetrele triunghiurilor AOB, BOC, COD sunt egale, atunci patrulaterul $ABCD$ este romb.

Soluție. Vom demonstra că $AB=BC=CD$. Să presupunem de exemplu că $AB\leq BC$. Considerăm atunci pe segmentul $[BC]$ punctul A_1 astfel încât $BA_1=BA$. Cum $\sphericalangle A_1BO\equiv\sphericalangle ABO$, se obține că $\vartriangle A_1BO\equiv\vartriangle ABO(L.U.L.)$, și deci perimetrele triunghiurilor A_1BO și CBO sunt egale. Atunci $A_1O=A_1C+CO$, deci A_1, O, C sunt coliniare și atunci $A_1=C$, de unde $BA=BC$. Cazul $BC\leq AB$ se tratează analog. De asemenea analog se obține că $BC=CD$. Conform Teoremei 2, avem că $AD+BC=AB+CD$, și cum $AB=BC=CD$, se obține că $ABCD$ rste romb.

Problema 6. Fie ABC un triunghi. Să se arate că toate dreptele care împart triunghiul în două poligoane de arii și perimetre egale sunt concurente.

Soluție. Să observăm că dacă MN este o dreaptă cu proprietățile din enunț ($M \in [AB], N \in [AC]$) , atunci și dreapta PQ are aceleași proprietăți, unde $AP = AN$ și $AQ = AM\left(P \in [AB], Q \in [AC]\right)$. Fie $MN \cap PQ = \{O\}$. Atunci $S_{\triangle OMP} = S_{\triangle OQN}$, și cum $MP = QN$ deducem că $d(O, AB) = d(O, AC) := r$, deci O se găsește pe bisectoarea din A a unghiului BAC. Pe de altă parte avem relațiile:

$\frac{1}{2} \cdot S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AMN} = \frac{AM \cdot r}{2} + \frac{AN \cdot r}{2} = \frac{1}{2} \cdot (AM + AN) \cdot r = \frac{1}{2} \cdot p \cdot r$, unde p este semiperimetrul triunghiului ABC. Deci $S_{\triangle ABC} = r \cdot p$, deci r este raza cercului înscris în triunghiul ABC, deci toate dreptele cu proprietățile din enunț trec prin centrul cercului înscris în triunghi.

Propunem spre studiu următoarele probleme:

1). Fie un triunghi ABC în care $AB = AC$, $(BN$ este bisectoarea unghiului $ABC\left(N \in (AC)\right)$, M este proiecția punctului N pe BC și I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Dacă $BI + BC = 2 \cdot BM$, să se determine măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

2). Fie triunghiul ABC în care $AB = 9$ cm, $AC = 15$ cm, G este centrul de greutate al triunghiului, iar I este centrul cercului înscris în triunghi. Dacă $IG \parallel BC$, să se calculeze BC.

3). Cercul înscris în triunghiul ABC este tangent laturilor AB și AC în M respectiv N. Fie P punctul de intersecție al dreptei MN cu bisectoarea unghiului ABC. Să se arate că $m(\sphericalangle BPC) = 90^\circ$.

4). În triunghiul ABC se duce bisectoarea $(CD, D \in (AB)$. Se știe că centrul cercului înscris în triunghiul BCD coincide cu centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

5). În triunghiul ABC, bisectoarele unghiurilor A și B intersectează cercul circumscris triunghiului în punctele K respectiv L. Fie $[AK] \cap [BL] = \{X\}$, astfel încât $\frac{AX}{XK} = \frac{BX}{XL}$. Să se arate că triunghiul ABC este isoscel.

6). Simetricul centrului cercului înscris intr-un triunghi față de una din laturile sale este situat pe cercul ω circumscris triunghiului. Să se demonstreze că simetricul centrului cercului ω față de o anumită latură a triunghiului este situat tot pe cercul ω.

7). Fie O centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Pe dreapta BC considerăm punctele A_1 și A_2, pe dreapta AC punctele B_1 și B_2, iar pe dreapta AB punctele C_1 și C_2, astfel încât $OA_1 = OA_2 = OA, OB_1 = OB_2 = OB, OC_1 = OC_2 = OC$. Să se arate că $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = AB + BC + AC$.

BIBLIOGRAFIE

1.Gh. Țițeica- Probleme de geometrie, Editura Tehnică , București.

2. N. Agahanov, O. Podlipsky- Olimpiade matematice rusești Moscova 1993-2002, Editura Gil, Zalău.

3. M. Ganga-Probleme elementare de matematică, Editura Mathpress, 2003.

4. Colecția Gazeta Matematică.

Profesoară Șc. Gen. Constantin Săvoiu, Tg-Jiu
Profesor C. N. Ecaterina Teodoroiu, Tg-Jiu

Argint și bronz la Olimpiada Națională de Matematică 2009

Marius Șandru

În perioada 29-31 mai 2009 s-a desfăşurat la Slatina, în judeul Olt, etapa finala a OLIMPIADEI NAȚIONALE DE MATEMATICĂ pentru clasele a V-a si a VI-a, la care au participat primii doi elevi calificați la nivelul fiecărui județ.

Lotul nostru s-a prezentat la clasa aV-a cu **Anca Ciobanu** si **Monica Neațu**, de la **Școala cu clasele I-VIII Nr.2 Reșița** (**prof. Marius Șandru**),iar la clasa a VI-a cu **Miruna Ciulu** de la **Școala cu clasele I-VIII Nr.6 Reșița** (**prof. Susana Simulescu**) și **Andrei Ștefănescu** de la **Școala cu clasele I-VIII Nr.1 Oțelu Roșu** (**prof. Feil Heidi**).

Concursul, patronat de **MECI** și **SSMR** avea să fie unul dintre cele mai puternice al ultimilor ani, atât prin nivelul de dificultate al subiectelor, cât și prin calitatea participanților.

Ne-am grupat unul lânga altul la Festivitatea de deschidere şi am simțit încă o data la ai noștri forță, dorință și curaj de a înfrunta ceea ce are mai bun şcoala românească în matematica claselor V-VI la momentul

dat. Rezultatele anterioare de la concursurile la care cei patru au participat (RMCS, Traian Lalescu, ± Poezie, Cangurul matematic, ş.a.) arătau că putem spera spre zona râvnită a medaliaţilor. Precedentul fusese creat la Neptun, de unde cei mari se întorseseră cu o medalie de argint şi două de bronz.

”Şi noi vom câştiga” păreau să spună din priviri fiecare dintre ei. Domnea totuşi echilibrul, onestitatea, calmul şi prudenţa care îi caracterizează pe aceşti copii maturi şi cărora doream să le transmit toata forţa şi puterea mea pentru un rezultat pe măsura valorii lor. Aceasta avea să-şi spună cuvântul în ziua concursului, sâmbătă, 30 mai 2009, când, după o judecată dreaptă a unui juriu competent şi de neclintit, **Anca** şi **Andrei** îşi adjudecau **medalii de argint**, **Miruna medalie de bronz**, iar **Monica** se afla la un pas de jumătatea premiată (SSMR a respectat principiul acordării medaliilor în părţi invers proporţionale cu 1/6, 1/3, 1/2 pentru aur, argint, bronz din numărul participanţilor clasaţi în jumătatea de sus). A fost un concurs dur, dar corect şi atent evaluat, dovadă şi faptul că nicio contestaţie nu a avut sorţi de izbândă în favoarea concurenţilor.

La Festivitea de premiere ne-am bucurat şi am simţit ceva dintr-o fericire greu atinsă, de către mulţi poate chiar neînţeleasă. Era rodul a ore şi ore de muncă, de studiu, de căutări. Era capătul unei curse pentru care s-au pregătit cu toata seriozitatea alături de profesori, ajutaţi de părinţi şi colegi, fără a fi ajuns la capătul drumului. Doi dintre ei realizau cât de aproape au fost de aur, **Anca** la 1 punct, iar **Andrei** la 3 locuri, încât reuşita lor fusese deja translatată în viitor, cu gândul la anul care vine, propunându-şi mai mult, pentru că :**„Ai învins, continuă, ai pierdut, continuă !’’**

Respectul şi consideraţia noastră sunt doar o parte a ceea ce ei merită.

Şcoala cu clasele I-VIII Nr.2 Reşiţa

Remarcă: La etapa naţională a Concursului Interdisciplinar PlusMinus Poezie, desfăşurată în acest an la Timişoara, elevii noştri au obţinut rezultate remarcabile :

∴ **Balmez Andrada,** Oraviţa, menţiune clasa a 5 a

∴ **Ciulu Miruna,** Reşiţa, menţiune clasa a 6 a

∴ **Gheorghişan Călin,** Oraviţa, menţiune clasa a 6 a.

Subiectele propuse în judeţul Caraş-Severin la Concursul Naţional pentru ocuparea posturilor vacante din învăţământul preuniversitar, 15 iulie 2009

SUBIECTUL I (60 puncte)

Problema 1. Fie matricile $A=\begin{pmatrix}5 & 12\\ 2 & 5\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$ şi $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}\in M_{2,1}(\mathbb{R})$

cu $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix},\forall n\in N$ şi $x_0=1, y_0=0.$

(5p) a) Să se determine x_1, y_1, x_2, y_2.

(5p) b) Să se arate că $x_n+y_n\sqrt{6}=\left(5+2\sqrt{6}\right)^n,\forall n\in\mathbb{N}$

(5p) c) Să se calculeze $x_n^2-6y_n^2$

(5p) d) Să se arate că $x_{n+2}-10x_{n+1}+x_n=0$

Problema 2. Fie ABCD un patrulater convex oarecare şi notăm cu α unghiul unghiul dintre laturile opuse AD şi BC

(5p) a) Demonstraţi egalitatea: $\cos\alpha=\dfrac{AC^2+BD^2-AB^2-DC^2}{2AD\cdot BC}$

(5p) b) Dacă β este unghiul ascuţit al diagonalelor demonstraţi că:

$$\cos\beta=\frac{\left|AD^2+BC^2-CD^2-AB^2\right|}{2AC\cdot BD}$$

(5p) c) Demonstraţi că dacă laturile opuse AD şi BC sunt perpendiculare atunci $AC^2+BD^2=AB^2+DC^2$

(5p) d) Arătaţi că diagonalele unui patrulater sunt perpendiculare dacă şi numai dacă suma pătratelor laturilor opuse este constantă.

Problema 3. Fie funcţia $f:R\to R$ dată de $f(x)=x+\cos x-1$ şi şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0=1, a_{n+1}=\int_0^{a_n}\sin(\pi x)dx$

(5 p) a) Determinaţi numărul de rădăcini reale ale funcţiei f

(5 p) b) Arătaţi că şirul (a_n) este monoton

(5 p) c) Arătaţi că şirul (a_n) este mărginit

(5 p) d) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

SUBIECTUL II (30 puncte)
Problema 1. Proiectați o unitate de învățare cu tema **DERIVABILITATE** în cadrul căreia să prezentați **numai** următoarele activități de învățare:

(5 p) a) Definirea derivatei unei funcții într-un punct(exemplificare prin două exemple)
(5 p) b) Interpretarea geometrică a derivatei unei funcții într-un punct
(5 p) c) Proprietăți ale funcțiilor derivabile
(5 p) d) Teoreme de medie, monotonie, convexitate

Problema 2. Elaborați pentru tema **BINOMUL LUI NEWTON** o probă de evaluare care să conțină:

(5 p) a) Itemi de următoarele tipuri: obiectivi, semiobiectivi și subiectivi

(5 p) b) Barem de corectare (răspuns corect pentru fiecare item și distribuirea punctajului de 100 de puncte, din care 10 puncte din oficiu)

Matematică la Crivaia
26 iulie-2 august 2009

Antoanela Buzescu, Ovidiu Bădescu

„Cât am fost aici, în această tabără, am simțit atât treaz cât și în vis că pot zbura, dar nu un zbor aemănător norilor, purtat de vânt ci un zbor cu propriile aripi, în voia sufeltului meu.

Dar cum am căpătat aceste aripi?

Păi, la început, prin matematică am prins speranță, am știut că se poate. Apoi am învătat să desenez tehnic și astfel am reușit să mi le concep. Apoi prin nașterea și botezarea de frumusețe și de iluminare pentru oameni am reușit să mi le cos. Când am simțit cu adevărat că le am în spate mi-am făcut o fotografie cu timpul și diafragmă potrivită și cu uimire am văzut cu ochii mei aripile albastre. Am învățat să mă orientez pentru a nu mă rătăci când voi zbura. Și astfel am simțit cum cu evlavie și bucurie zburam într-un ecou de bătăi de aripi. Acum eram unde am vrut....” (*Dinulică Augustin, Cls a VI-a)*

Sunt gânduri ale unui elev drag nouă, însă suntem convinși că sunt gândurile tuturor elevilor participanți în această tabără. Orice am încerca să adăugăm acestor cuvinte nu ar face decât să le micșoreze profunzimea și nu vrem asta.

Spunem doar că a fost o săptămână extraordinară, o săptămână plină de matematică, de voie bună și de tot felul de ateliere: fotografie, desen, comunicare și...cercetași.

Au fost seri în care ne prindea noaptea în pădure, nopți în care am cântat cu toții “ Luptă Poli, luptă pentru noi!” fiind seara acelui magic 2-0 de la Șahtior, au fost seri în care porumbul fiert avea cel mai minunat gust.

Au fost zile în care am mers în drumeție sau în care am fost cu toții uzi leoarcă, au fost dimineți în care înviorarea ne aducea cel mai curat aer posibil.

Au fost și probleme grele, au fost și telefoane acasă să aflăm cine e criminalul problemei din Vestul Sălbatic, au fost sponsorizări ale focului de tabără.

Au fost așa de multe încât, dacă le-am înșirui nu ar încăpea în paginile acestei reviste, de aceea ne oprim aici.

Martor ne e sufletul plin de amintiri, dvd-urile taberei(pe care, dacă vreți, le solicitați profesorilor organizatori) și revista taberei plină de gândurile voastre.

Pentru toate acestea, noi profesorii participanți în tabără, vă mulțumim.

Spiridușii taberei:
Balmez Andrada, Benec Emanuela, Bivolaru Mălina, Buzescu Mălina, Cerna Miruna, Dănilă Mădălina, David Andrei, David Mihai, Dinulică Augustin, Dinulică Septimiu, Dolot Nicole, Gheorghișan Călin, Iliescu Alexandru, Jurescu Cristian, Murgu Teodora, Neagoe Loredana, Neațu Monica, Piess Helmuth, Pîrvu Ancuța, Podariu Ana, Rus Daniel, Șandru Bogdan, Semenescu Raluca, Toma Alexandru, Vasilovici Camil, Vernicu Georgiana

Profesorii taberei:
Pîrvu Camelia, Buzescu Antoanela, Feil Heidi, Stăniloiu Nicolae, Bădescu Ovidiu, Călin Ciprian, Călin Ramona, Șandru Marius

“Cu siguranță această tabără este de neuitat. Am râs, am plâns și am împărtășit momente de bucurie și de tristețe cu toți cei din tabără. Colegilor mei din tabără pot să le spun acum prieteni, căci numai prieteni se pot numi cei cu care te distrezi la maxim și fără de care viața nu ar mai avea haz.”(Dolot Diana Nicole, Cls a V-a)

Probleme rezolvate din RMCS nr.27

Clasa a V-a

V.130 Se consideră numărul $A=\overline{5a}+\overline{a5}$.

a) Determinați *a* pentru care *A* este pătrat perfect;

b) Arătați că nu există *a* pentru care *A* este cub perfect;

c) Determinați *a* pentru care restul împărțirii lui *A* la 5 este 4.

Prof. Heidi Feil, Oțelu – Roșu

Soluție: a) $11\cdot(5+a)=k^2, k\in\mathbb{N}\Rightarrow 5+a=11p^2, p\in\mathbb{N}$.Cum *a* este cifră, deducem imediat $a=6$; b)egalitatea $5+a=11^2\cdot p^3$ este imposibilă(...);c) $55+11a=5q+4$ şi se ajunge imediat la $a\in\{4;9\}$.□

V.131 Să se arate că : $2^{2009}>256^{15}\cdot 15^{256}$.

Prof. Adriana Dragomir, Oțelu – Roșu

Soluție: Deoarece $2^{2009}=2^{120}\cdot 2^{1889}$ şi $256^{15}=2^{120}$, rămâne de arătat că: $2^{1889}>15^{256}$ $(*)$; cum însă $2^{1889}=2\cdot(2^4)^{472}=2\cdot 16^{472}$,egalitatea $(*)$ se obține imediat. □

V.132 Să se determine câte numere naturale de cinci cifre, scrise în baza 10, au produsul primelor două cifre egal cu un număr prim p, iar suma ultimelor două cifre egală cu p^2 .

Prof. Adriana Dragomir, Iulia Cecon,, Oțelu – Roșu

Soluție: Dacă pentru $x=\overline{abcde}$ avem $d+e=p^2$, cu $d,e\le 9$, deducem: $p\in\{2;3\}$. 1) Pentru $p=2$, avem $a\cdot b=2$ şi $d+e=4$, iar $c\in\{0,1,2,...,9\}$.Cu principiul produsului deducem că avem $2\cdot 10\cdot 5=100$ de numere; 2) Pentru $p=3$, obținem încă 200 de numere, aşadar avem în total 300 de numere care satisfac enunțul.□

V.133 Dacă *x* și *y* sunt numere naturale de două cifre astfel încât restul împărțirii numărului $2\cdot x$ la $2\cdot y$ este 4, iar restul împărțirii numărului $3\cdot x$ la $4\cdot y$ este 18, găsiți restul împărțirii numărului $11\cdot x$ la *y*.

Prof. Adriana Dragomir, Oțelu – Roșu

Remarcă: Enunțul publicat inițial conduce la concluzia că *y* nu poate avea două cifre! (Chiar dacă unii au ajuns la concluzia că, pentru $y\ge 8$, restul cerut este 7).Arătați şi voi aceasta! □

V.134 Găsiți cel mai mic număr natural nenul *b* pentru care există *a* natural nenul astfel încât:

i) restul împărțirii lui *a* la *b* este 3;

ii) restul împărțirii lui $2\cdot a$ la $3\cdot b$ este 11.

Prof. Adriana Dragomir, Oțelu – Roșu

Soluție: $a=b\cdot q+3$ şi $2a=3b\cdot p+11$, $11<3b$, de unde $b\ge 4$. Dacă $b=4$, ajungem la $8q+6=6p+11$, absurd (!).Avem acum că $b=5$ verifică enunțul (pentru $a=13$). □

V.135 Determinați numerele *a* și *b* pentru care $\overline{ba}-\overline{ab}$ este multiplu de 4, iar $\overline{ba}+\overline{ab}$ este multiplu de 5.

Prof. Adriana Dragomir, Oțelu – Roșu

Soluție: Pentru $b\ge a$ se obține $(a,b)\in\{(5,5),(3,7),(1,9)\}$.□

V.136 Precizați, justificând răspunsul, dacă există numere naturale *n* pentru care $2^n+3\cdot 2^{n+1}=2009$.

Prof. Adriana Dragomir, Oțelu – Roșu

Răspuns:Problema e simplă, se ajunge la $2^n=287$, egalitate imposibilă dintre două numere de parități diferite ($n\ge 1$).□

V.137 Găsiți toate perechile (A,B) de mulțimi *A* şi *B* care satisfac următoarele condiții:

a) *A* şi *B* au câte trei elemente, numere naturale nenule;

b) suma elementelor mulțimii *A* este egală cu suma elementelor mulțimii *B* și este egală cu 10;

c) $A\cap B$ are un singur element.

Prof. Adriana Dragomir, Oțelu – Roșu

Răspuns: Există 12 perechi de mulțimi care satisfac enunțul:

$A_1=\{1,2,7\}, B_1=\{1,3,6\}, A_2=\{1,3,6\}, B_2=\{1,2,7\}$,

$A_3=\{1,4,5\}, B_3=\{1,2,7\}, A_4=\{1,2,7\}, B_4=\{1,4,5\}$, ...,

$A_{11}=\{1,4,5\}, B_{11}=\{2,3,5\}, A_{12}=\{2,3,5\}, B_{12}=\{1,4,5\}$. □

V.138 Aflați ultimele patru cifre ale numărului

$$n=3^{2009}+3^{2008}+3^{2006}+3^{2003}.$$

Prof. Pavel Rîncu, Dalboşeț

Răspuns: 7000. □

V.139 Arătați că nu existe numere naturale x și y pentru care $N = x^8 + 7(10y^2 + 1)$ este pătrat perfect.

Prof. Pavel Rîncu, Dalboșeț

Soluție: Ultima cifră a numărului $7(10y^2 + 1)$ este 7, iar ultima cifră a lui x^8 poate fi 0, 1 , 5 sau 6, așadar ultima cifră a lui *N* poate fi 2, 3, 7 sau 8, deci *N* nu poate fi pătrat perfect. □

Clasa a VI-a

VI.130 La începutul anului școlar, 40% din elevii unei clase sunt fete. În timpul anului școlar mai vin trei băieți și pleacă o fată și astfel, la sfârșitul anului școlar sunt de două ori mai mulți băieți decât fete. Câți elevi au fost la începutului anului școlar în acea clasă?

Concurs București, 2003

Răspuns: 10 fete, 15 băieți, deci 25 de elevi. □

VI.131 Să se arate că printre oricare cinci numere naturale nenule există cel puțin două a căror diferență este divizibilă cu 4.

* * *

Soluție: Orice număr natural are una din formele $4n, 4m+1, 4p+2, 4q+3$ unde $n, m, p, q \in \mathbb{N}$; conform principiului cutiei avem că printre oricare 5 numere naturale există două, x și y, care au aceeași formă: $x = 4n + r$ și $y = 4m + r$;avem astfel că $x - y = 4(n - m)$, care e divizibil cu 4. □

VI.132 Fie $\measuredangle AOB$ și $\measuredangle BOC$ două unghiuri adiacente și suplementare, iar *M* și *P* două puncte astfel încât *M* este în interiorul unghiului $\measuredangle AOB$, iar *P* în interiorul unghiului $\measuredangle BOC$. Dacă *M* este egal depărtat de $(OA$ și $(OB$, iar *P* este egal depărtat de $(OB$ și $(OC$, determinați măsura unghiului $\measuredangle MOP$.

Prof. Irina Avrămescu, Reșița

Soluție: *M* se află pe bisectoarea lui $\measuredangle AOB$, iar *P* pe bisectoarea lui $\measuredangle BOC$ .Deducem imediat: $m(\measuredangle MOP) = \frac{m(\measuredangle AOB)}{2} + \frac{m(\measuredangle BOC)}{2} = 90^o$.

VI.133 Fie *a,b,c* trei numere naturale nenule care satisfac condiția $a = \frac{b}{0,2} = \frac{c}{0,(3)}$, iar numerele $a + b$ și *c* sunt prime între ele.

a) să se arate că $a + b$ este divizibil cu 18;
b) să se determine numerele *a,b,c.*

Prof. Nistor Budescu, Dalboșeț

Soluție: $a = 5b = 3c = k \in \mathbb{N}^*$ conduce la: $k = 15p$, de unde $a = 15p, b = 3p, c = 5p$ și astfel $a + b = 18p$; folosind a doua condiție din ipoteză deducem că $p = 1$, concluzia fiind imediată. □

VI.134 Se dau numerele $a = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + ... + \frac{2002}{2003}$, $b = \frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{5}{7} + ... + \frac{4003}{4005}$, $c = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2001}{2002}$ și $d = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot ... \cdot \frac{2002}{2003}$. Arătați că:

a) $a > b$; b) $c < d$; c) $d^2 > \frac{1}{2003}$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

Idei: a) se arată că $\frac{n}{n+1} > \frac{2n-1}{2n+1}, n = \overline{1,2002}$; b) se arată că $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}$, $n \in \{1,3,5,...,2001\}$; c) se folosește subpunctul b) și faptul că $c \cdot d = \frac{1}{2003}$.

VI.135 Măsurile unghiurilor (măsurate în grade) din jurul unui punct, sunt *x, y, z, t* .Numerele *2x, 3y, 4z, 5t* sunt direct proporționale cu 4, 6, 12 și respectiv *a*, unde *a* este un număr natural nenul. Determinați *a, x, y, z, t*, știind că $x + t = y + z$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roșu

Răspuns: $a = 15, x = y = 72^o, z = t = 108^o$.□

VI.136 Determinați numerele întregi *x* și *y* pentru care $2xy - 2009 = 4x - 3y$.

Concurs Vaslui , 2003

Răspuns: $(x, y) \in \{(1000,3), (-1,2005), (-2,-2001), (-1003,1)\}$.□

VI.137 Se consideră numerele naturale $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$. Spunem că mulțimea $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ are proprietatea *(P)* dacă pentru orice $k \in \{3,4,5,6\}$, există $i, j \in \{1,2,3,4,5,6\}, i \neq j$, astfel încât $a_k = a_i + a_j$. Să se afle câte mulțimi cu proprietatea *(P)* sunt de forma $\{1,2,a,b,c,d\}$.

Concurs Iaşi, 2003

Soluție: Elementul a trebuie să fie suma celor două elemente care îl preced, deci $a=3$.Cum b se obține ca sumă a două elemente precedente, avem $b \in \{4,5\}$;dacă $b=4$, atunci $c \in \{5,6,7\}$,în fiecare caz găsind câte 4 valori posibile ale lui d, iar dacă $b=5 \Rightarrow c \in \{6,7,8\}$, în fiecare caz găsind şi aici câte 4 valori posibile pentru d.Obținem astfel în total 24 de mulțimi cu proprietatea din enunț. (evident, ce apare de mai multe ori, se numără o singură dată!)□

VI.138 Să se găsească perechile (a,b)de numere naturale pentru care

$$5a-2b \leq 3 \text{ şi } 2a+b \leq 3.$$

Prof. Heidi Feil, Oțelu – Roşu

Răspuns: $(a,b) \in \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,1)\}$. □

VI.139 Să se determine numerele prime *a* şi *b* pentru care

$$\frac{a}{b+1} \text{ şi } \frac{2b+2}{a-1} \text{ sunt numere naturale.}$$

Prof. Adriana Dragomir, Oțelu – Roşu

Răspuns: $a=3, b=2$.

Clasa a VII-a

VII.130 Fie: $S = 1+2+3+...+n$ şi

$$P = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right), n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$$

Arătați că numărul $A = \sqrt{S \cdot P}$ este rațional.

Prof. Delia Marinca, Timişoara

Idee: $S \cdot P = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{n+1}{2n} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$. □

VII.131 Pentru $n \in \mathbb{N}$, considerăm numărul $A(n) = \sqrt{n^2 + 7n + 12}$

a) Aflați prima zecimală a numărului $A(0)$.

b) Arătați că $\forall n \in \mathbb{N}$,numărul $A(n)$ este irațional.

c) Arătați că, partea fracționară a numărului $A(n)$este mai mică decât 0,5, $\forall n \in \mathbb{N}$..

Prof. Irina Avrămescu, Reşița

Soluție: a) 4; b) $(n+3)^2 < (n+3)(n+4) = n^2+7n+12 < (n+4)^2$, deci $n^2+7n+12$ nu poate fi pătrat perfect; c) se arată imediat că:
$n+3+\frac{4}{10} < \sqrt{n^2+7n+12} < n+3+\frac{5}{10}, \forall n \in \mathbb{N}$. □

VII.132 Să se afle $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $(x-3)(y-2) = 72$ şi numărul $x+y$ să fie pătrat perfect sau cub perfect.

Prof. Irina Avrămescu, Reşița

Răspuns: $x=7, y=20$ sau $x=21, y=6$. □

VII.133 Câte triunghiuri dreptunghice ale căror laturi sunt numere naturale au o catetă egală cu 15?

Prof. Loreta Ciulu, Reşița

Soluție: Din $b^2+225=a^2$ ajungem la $(a-b)(a+b) = 3\cdot3\cdot5\cdot5$;analizând cazurile posibile, obținem 4 triunghiuri, cu lungimile laturilor: $(112,15,113)$, $(36,15,39)$,$(15,20,25)$,$(8,15,17)$. □

VII.134 Se dă un trapez *ABCD*, $AD > BC$, $BC \parallel AD$. Pe *CD* se ia un punct *K*, pe *AB* punctul *L* astfel încât $AK \parallel CL$.Să se arate că $DL \parallel BK$.

Prof. Loreta Ciulu, Reşița

Soluție: Notăm $\{M\} = AB \cap DC$ .Din $AK \,//\, CL$ avem $\frac{MK}{MA} = \frac{MC}{LM}(1)$, apoi $BC \,//\, AD \Rightarrow \frac{MC}{MD} = \frac{MB}{MA}(2)$, de unde
$MA \cdot MC = MD \cdot MB = LM \cdot MK$, şi astfel: $\frac{MB}{LM} = \frac{MK}{MD} \Rightarrow DL \,//\, BK$.□

VII.135 Arătați că $\sqrt{6^n+5n+7} \notin \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Prof. Pavel Rîncu, Dalboşeț

Soluție: Se deduce imediat că ultima cifră a numărului de sub radical nu poate fi decât 3 sau 8,etc. □

VII.136 Determinați măsurile unghiurilor unui triunghi știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) un unghi este congruent cu complementul altui unghi;
b) măsurile a două unghiuri sunt direct proporționale cu numerele 1 și 3.

Prof. Constantin Apostol, Rm.Sărat

Răspuns: $30^o, 60^o, 90^o$ sau $22^o30', 67^o30', 90^o$. □

VII.137 a) Dacă $3x = \overline{3,a}$, care este cel mai mic număr cu care poate fi egal x ? Dar cel mai mare ?

b) Dacă $7x = \overline{9,b}$, care este cel mai mic număr cu care poate fi egal x ? Dar cel mai mare ?

c) Să se determine numărul x și cifrele nenule a , b pentru care avem: $\begin{cases} 3x = \overline{3,a} \\ 7x = \overline{9,b} \end{cases}$

Prof. Constantin Apostol, Rm.Sărat

Soluție: a) $x_{\min} = 1, x_{\max} = \frac{13}{10}$; b) $x_{\min} = \frac{9}{7}, x_{\max} = \frac{99}{70}$; c) $x = \frac{13}{10}, a = 9, b = 1$.□

VII.138 Suma pătratelor a 18 numere naturale nenule este 2009.Arătați că cel puțin două dintre numere coincid.

* * *

Idee: Cele mai mici 18 numere naturale consecutive au suma pătratelor egală cu $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 18^2 = 2109 > 2009$ .Puteți da un exemplu de numere care satisfac enunțul? (De reținut: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$). □

VII.139 Fie V mulțimea vârfurilor unui poligon regulat cu 20 de laturi și $A \subset V$ o submulțime arbitrară.Să se arate că:

a) Dacă A are cel puțin 9 elemente, atunci există în A trei puncte care sunt vârfurile unui triunghi isoscel;
b) Dacă A are cel puțin 11 elemente, atunci există în A trei puncte care sunt vârfurile unui triunghi dreptunghic isoscel.

Concurs Cluj – Napoca, 2008

Soluție: a) Fie $P_1P_2...P_{20}$ poligonul regulat și $A \subset \{P_1, P_2, ..., P_{20}\}$ .Colorăm vârfurile $P_1, P_5, P_9, P_{13}, P_{17}$ cu roșu, $P_2, P_6, P_{10}, P_{14}, P_{18}$ cu galben, $P_3, P_7, P_{11}, P_{15}, P_{19}$ cu verde, $P_4, P_8, P_{12}, P_{16}, P_{20}$ cu albastru.Remarcăm că vârfurile de aceeași culoare formează un pentagon regulat, iar în A există cel puțin 3 vârfuri ale unui pentagon regulat;atunci cele 3 vârfuri sunt vârfuri consecutive în pentagon sau sunt două vârfuri alăturate împreună cu vârfuri opuse, oricum, în ambele cazuri, triunghiul este isoscel; b) colorăm vârfurile în 5 culori, din 5 în 5 vârfuri, astfel încât vârfurile colorate cu aceeași culoare să formeze un pătrat.Atunci printre cele cel puțin 11 ale lui A avem 3 colorate la fel, care sunt deci vârfuri ale unui pătrat și deci ale unui triunghi dreptunghic isoscel. □

Clasa a VIII-a

VIII.130 Să se găsească perechile de numere naturale consecutive astfel încât cubul primului număr și pătratul celuilalt să fie tot numere consecutive.

Prof. Sânefta Vladu, Moldova Nouă

Răspuns: $(0,1)$ și $(2,3)$.

VIII.131 Un corp în formă de paralelipiped dreptunghic are la bază un dreptunghi cu dimensiunile de $x^2 - 1$ și $(x+2)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Dacă $h = \frac{1}{(x+2)(x^2+3x+2)}$, determinați valorile reale ale lui x , astfel încât volumul corpului să fie subunitar.
b) Dacă $h = 3$, determinați valorile lui x astfel încât aria laterală a corpului să fie minimă și determinați această valoare.

Prof. Sânefta Vladu, Moldova Nouă

Răspuns: a) $x \in (0,1)$; b) $x = -1, A_{lat} = 6$. □

VIII.132 Se consideră triunghiul echilateral ABC , un punct O în interiorul triunghiului și M, N, P proiecțiile punctului O pe $[BC], [CA]$ respectiv $[AB]$. Să se arate că dacă triunghiul MNP este echilateral atunci O este centrul de greutate al triunghiului ABC .

Prof.Mircea Constantinescu, Tg-Jiu

Soluție: Avem $m(\sphericalangle MON)=m(\sphericalangle PON)=120^{\circ}$. Vom arăta că $OM=OP$; presupunem că $OM>OP$ și considerăm $X\in(OM)$ cu $OX=OP$.
Deducem $\triangle PON\equiv\triangle XON\Rightarrow NX=PN=MN\Rightarrow m(\sphericalangle NXM)=m(\sphericalangle NMX)$, fals,deoarece $m(\sphericalangle NXM)>m(\sphericalangle NOX)=120^{\circ}$, iar $m(\sphericalangle NMX)<60^{\circ}$. Deci $OM=OP$ și analog $OM=ON$. Avem astfel că O este centrul cercului înscris în triunghiul ABC,concluzia fiind imediată.□

VIII.133 Să se precizeze dacă numărul $a=2^{30}+2005^{32}$ este prim, justificând răspunsul.

Prof. Pavel Rîncu, Dalboşeţ

Soluție: Pentru uşurința scrierii notăm $x=2^{15}, y=2005^{16}, z=2^{8}\cdot 2005^{8}$ şi obținem $a=x^2+y^2=x^2+y^2+2xy-2xy=(x+y)^2-z^2=(x+y-z)(x+y+z)$, deci numărul este compus. □

VIII.134 Câte ecuații de gradul al doilea cu coeficienții diferiți şi care aparțin mulțimii $M=\{-3,1,2\}$ există ? Arătați că toate aceste ecuații au o rădăcină comună.

Prof. Constantin Apostol, Rm.Sărat

Soluție: Există 6 ecuații şi, deoarece suma coeficienților este egală cu 1, toate au ca rădăcină numărul 1. □

VIII.135 Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi M,N,P mijloacele muchiilor $[AB],[CC']$ respectiv $[A'D']$. Să se demonstreze că $B'D\perp(MNP)$.

Prof. Marina Constantinescu, Tismana

Soluție: Dacă *S* este mijlocul lui *[MN]*, avem:
$\triangle B'BM\equiv B'C'N(C.C.)\Rightarrow B'M=B'N\Rightarrow B'S\perp MN.$
Analog: $DM=DN\Rightarrow DS\perp MN$. Aşadar
$MN\perp(B'DS)\Rightarrow MN\perp B'D.$ Analog $B'D\perp MP$, de unde $B'D\perp(MNP)$.
□

VIII.137 Arătați că, dacă $a,b,c>0$ şi $a^2+b^2+c^2=\frac{5}{3}$, atunci

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}<\frac{1}{abc}.$$

Concurs Arad 2008

Soluție: Inegalitatea propusă este echivalentă cu $c(a+b)<ab+1$ sau $c(a+b)<\frac{(a+b)^2-a^2-b^2}{2}+1$; notând $a+b=x$, avem de arătat că: $x^2-2cx+c^2+\frac{1}{3}>0$, care este evidentă... □

VIII.138 Fie mulțimea $A=\{1,2,3,...,98\}$. Arătați că oricum am alege 50 de elemente ale mulțimii *A*, există două printre ele având suma cub perfect.

Concurs Iaşi 2008

Soluție: Considerăm submulțimile $\{27,98\},\{28,97\},...,\{62,63\},\{3,61\}$, $\{4,60\},...,\{26,38\}$; acestea au proprietatea că suma elementelor fiecărei mulțimi este cub perfect; mai considerăm şi submulțimile $\{1\},\{2\}$, având astfel un total de 50 de mulțimi. Presupunem,prin reducere la absurd,concluzia falsă,aşadar putem alege 50 de elemente printre care să nu existe două cu suma cub perfect.Trebuie atunci să alegem $\{1\}$ şi $\{2\}$ şi câte un element din submulțimile cu câte două elemente.Este necesar să luăm numărul 62(altfel am avea $1+63=4^3$); avem însă şi în acest caz $2+62=4^3$, contradicție. □

VIII.139 Există $a,b\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a^2+b^2=4^{2009}$? Justificare.

Prof. Marina Constantinescu, Tismana

Soluție: Presupunem că există numere cu proprietatea din enunț şi folosim faptul că pătratul oricărui număr natural e de forma
$4k$ sau $4k+1, k\in\mathbb{N}$. Dacă $a^2=4k+1, b^2=4p+1, k,p\in\mathbb{N}$, rezultă
$a^2+b^2=4l+2, l\in\mathbb{N}$, fals. Dacă
$a^2=4k+1, b^2=4p\Rightarrow a^2+b^2=4l+1, l\in\mathbb{N}$, fals. Aşadar
$a=2a_1, b=2b_1$ şi deci $a^2+b^2=4\left(a_1^2+b_1^2\right)\Rightarrow a_1^2+b_1^2=4^{2008}$.
Continuând procedeul din aproape în aproape ajungem la
$u^2+v^2=1, u,v\in\mathbb{N}^*$, fals,deci nu există numere cu proprietatea din enunț
□

Clasa a IX-a

IX.130 Să se determine $n \in \mathbb{N}$ şi $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}_+^*$ care satisfac egalităţile: $\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_n = 3 \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n} = 3 \end{cases}$.

Prof. Pavel Rîncu, Dalboşeţ

Soluţie: Folosind $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} \geq \dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k}}$, deducem că $n \in \{1,2,3\}$ .Studiem fiecare din cazurile posibile şi avem, pentru $n = 2$: $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, iar pentru $n = 3$: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. □

IX.131 a) Să se dea un exemplu de număr real a pentru care $\{a\} + \left\{\dfrac{1}{a}\right\} = 1$; b) Să se arate că dacă $a \in \mathbb{R}, a > 0$, satisface $\{a\} + \left\{\dfrac{1}{a}\right\} = 1$, atunci $a \notin \mathbb{Q}$.

Concurs Bucureşti 2008

Soluţie: a)Din $a + \dfrac{1}{a} = [a] + \left[\dfrac{1}{a}\right] + \{a\} + \left\{\dfrac{1}{a}\right\} = [a] + \left[\dfrac{1}{a}\right] + 1 = k \in \mathbb{Z}$, ajungem la $a^2 - ka + 1 = 0$, de unde $a = \dfrac{k \pm \sqrt{k^2-4}}{2}$; putem lua astfel, de exemplu, $a = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.b) Numărul a este raţional dacă şi numai dacă $k^2 - 4 = p^2, p \in \mathbb{Z}$; se ajunge imediat la $k = 2 \Rightarrow a = 1$, care nu verifică egalitatea din enunţ. □

IX.132 Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este o mulţime cu cel puţin trei elemente având proprietatea că, pentru orice două elemente distincte $x, y \in A$, rezultă $(x + y) \in \mathbb{Q}$, arătaţi că $A \subset \mathbb{Q}$.

Concurs Bucureşti 2008

Soluţie: Presupunem că există $z \in A, z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;avem acum,conform ipotezei: $x + y, y + z, z + x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + y + z \in \mathbb{Q}$;cum $x + y \in \mathbb{Q}$, deducem $z \in \mathbb{Q}$,contradicţie.□

IX.133 Să se calculeze suma $\sum_{k=2}^{2009} \dfrac{a_k}{b_k}$, unde $a_k = \left[\dfrac{k^2}{4}\right]$şi $b_k = \left[\dfrac{k}{2}\right]$ (prin $[x]$ se înţelege partea întreagă a numărului real x).

Prof. Andrei Eckstein, Timişoara

Soluţie: Dacă k este par, atunci $k = 2j, j \in \mathbb{N}$, deci $a_k = j^2$, iar $b_k = j$, deci $\dfrac{a_k}{b_k} = j$; dacă $k = 2j+1, j \in \mathbb{N}$, avem: $a_k = \left[\dfrac{4j^2+4j+1}{4}\right] = j^2 + j$, iar $b_k = j$, deci $\dfrac{a_k}{b_k} = j+1$. Prin urmare suma căutată este egală cu: $1+2+2+3+3+4+4+...+1004+1004+1005 = 1004 \cdot 1006$. □

IX.134 Arătaţi că, dacă $x, y > 0$ şi $x \cdot y = 1$, atunci $\dfrac{x^2+2}{y+1} + \dfrac{y^2+2}{x+1} \geq 3$.

Prof. Andrei Eckstein, Timişoara

Soluţie: Punem $y = \dfrac{1}{x}$ şi inegalitatea devine $x^4 - x^2 - 2x + 2 \geq 0$, adică $(x-1)^2(x^2+2x+2) \geq 0$, care este evidentă. Soluţie alternativă: Punem $x = \dfrac{a}{b}, y = \dfrac{b}{a}$ şi ajungem la $a^5 + b^5 \geq a^3b^2 + a^2b^3$ sau $(a^3 - b^3)(a^2 - b^2) \geq 0$, ceea ce este evident, deoarece parantezele au acelaşi semn.. Observaţie: Inegalitatea rămâne adevărată şi dacă înlocuim condiţia $x \cdot y = 1$ cu $x + y \geq 2$ (care este clar mai slabă). □

IX.135 Determinaţi mulţimea A a numerelor reale care se pot scrie sub forma $[-3x]+[-2x]+[-x]+[x]+[2x]+[3x], x \in \mathbb{R}$.

Prof. Andrei Eckstein, Timişoara

Soluţie: Se verifică uşor că dacă $y \in \mathbb{Z}$ atunci $[-y]+[y]=0$, iar dacă $y \notin \mathbb{Z}$, atunci $[-y]+[y]=-1$ (într-adevăr, dacă $y \in (n, n+1)$, atunci $[y]=n, [-y]=-n-1$). Aşadar,dacă $x, 2x, 3x \notin \mathbb{Z}$,avem

$\left[-3x\right]+\left[-2x\right]+\left[-x\right]+\left[x\right]+\left[2x\right]+\left[3x\right]=-1-1-1=-3$. Dacă $x\in\mathbb{Z}$, avem: $\left[-3x\right]+\left[-2x\right]+\left[-x\right]+\left[x\right]+\left[2x\right]+\left[3x\right]=0$, iar dacă $x\notin\mathbb{Z}$ şi unul dintre numerele *2x* şi *3x* este întreg (ambele nu pot fi întregi dacă *x* nu este întreg), avem $\left[-3x\right]+\left[-2x\right]+\left[-x\right]+\left[x\right]+\left[2x\right]+\left[3x\right]=-2$.

Mulţimea cerută este aşadar $\{-3,-2,0\}$. □

IX.136 Dacă *M* este un punct în interiorul unui triunghi *ABC*, se notează $AM\cap BC=\{D\}$, $BM\cap CA=\{E\}$ şi $CM\cap AB=\{F\}$ .Să se determine punctul *M* pentru care produsul $\frac{MA}{MD}\cdot\frac{MB}{ME}\cdot\frac{MC}{MF}$ are valoare minimă.

Concurs Slatina 2008

Soluţie: Cu teorema lui Menelaus avem: $\frac{MA}{MD}=\frac{BC}{BD}\cdot\frac{EA}{EC}=\frac{BC}{CD}\cdot\frac{FA}{FB}$, $\frac{MB}{ME}=\frac{CA}{CE}\cdot\frac{FB}{FA}=\frac{CA}{AE}\cdot\frac{BD}{DC}$ şi $\frac{MC}{MF}=\frac{AB}{AF}\cdot\frac{CD}{DB}=\frac{AB}{BF}\cdot\frac{CE}{EA}$.Deducem astfel: $\left(\frac{MA}{MD}\cdot\frac{MB}{ME}\cdot\frac{MC}{MF}\right)^2=\frac{BC^2}{BD\cdot CD}\cdot\frac{CA^2}{CE\cdot EA}\cdot\frac{AB^2}{AF\cdot FB}\geq 64$, de unde $\frac{MA}{MD}\cdot\frac{MB}{ME}\cdot\frac{MC}{MF}\geq 8$, cu egalitate dacă *M* este centrul de greutate al triunghiului. □

IX.137 Să se determine numerele reale *m* pentru care rădăcinile ecuaţiei $x^2-(m+2)x+3=0$ sunt întregi.

Prof.Simina Moica,Arad

Soluţie: Folosind relaţiile lui Viete obţinem imediat $m\in\{-6;2\}$.□

IX.138 Să se determine , pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ valoarea maximă a produsului $P=\cos a_1\cdot\cos a_2\cdot\ldots\cdot\cos a_n$, ştiind că $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ şi $\cos a_1\cdot\cos a_2\cdot\ldots\cdot\cos a_n=\sin a_1\cdot\sin a_2\cdot\ldots\cdot\sin a_n$.

Prof. Pavel Rîncu, Dalboşeţ

Soluţie: Dacă $\cos a_k=0\Rightarrow a_k=(2k+1)\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin a_k\neq 0$,contradicţie, aşadar $\cos a_k\neq 0,\forall k=\overline{1,n}$, de unde $(*)\prod_{k=1}^{n}tga_k=1$ .Deoarece $\cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2x}$, din $(*)$ deducem : $\prod_{k=1}^{n}tg^2a_k=1$. Acum, folosim $1+tg^2a_k\geq 2\left|tga_k\right|,\forall k=\overline{1,n}$ şi ajungem la

$$\prod_{k=1}^{n}\cos^2 a_k=\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+tg^2a_k\right)}\leq\frac{1}{2^n\cdot\prod_{k=1}^{n}tga_k}$$

. Concluzionând, avem: $P^2\leq\frac{1}{2^n}\Rightarrow P\leq\frac{1}{\sqrt{2^n}}$. Aşadar $P_{\max}=\frac{1}{\sqrt{2^n}}$. □

IX.139 Demonstraţi că $\sum_{k=1}^{n-1}k\pi\cdot\sin\frac{k\pi}{n}\geq\frac{n\pi}{2}\cdot ctg\frac{\pi}{2n}$, $\forall n\in\mathrm{N},n>1$.

Cosmin Istodor, student, Timişoara

Soluţie: Se aplică inegalitatea lui Cebâşev astfel:

$$n\left(\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\frac{(n-1)\pi}{n}\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\geq$$
$$\geq\left(\frac{\pi+2\pi+\ldots+(n-1)\pi}{n}\right)\cdot ctg\frac{\pi}{2n}\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n-1}k\pi\cdot\sin\frac{k\pi}{n}\geq\frac{n(n-1)}{2}\cdot\pi\cdot ctg\frac{\pi}{2n}.$$

Clasa a X-a

X.130 Să se rezolve ecuaţia:

$$20^x-16^x=16\left(8^x+6\cdot 4^x+16\cdot 2^x+16\right)$$

Prof. dr. Vasile Marinca, Timişoara

Idee: Se observă soluţia $x=4$, se trece 16^x în dreapta şi se împarte cu 20^x, se consideră o funcţie convenabilă, strict monotonă, care conduce la unicitatea soluţiei observate.

X.131 Să se rezolve ecuaţia : $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\sqrt{\left(5-2\sqrt{6}\right)^x}=10$.

Prof. Sânefta Vladu, Moldova Nouă

Răspuns: $x \in \{-2;2\}$. □

X.132 Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe de modul 1 astfel încât $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.

a) Să se arate că $|z_1 + z_2 + z_3| \in \mathbb{N}$;

b) Aflați numerele dacă $z_2 = \overline{z_1}$ și $z_3 \in \mathbb{R}$.

Prof. Iacob Didraga, Caransebeș, Olimpiadă Caraș – Severin 2006

Soluție: a) $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = 2z_1z_2z_3 \cdot \sum \frac{1}{z_k} =$

$= 2z_1z_2z_3 \cdot \sum \overline{z_k}$. Aplicăm aici modulul și ajungem la $|z_1 + z_2 + z_3| \in \{0, 2\} \subset \mathbb{N}$; b) din $z_3^2 = 1$ deducem $z_1^2 + \overline{z_1}^2 = -1 \Rightarrow (z_1 + \overline{z_1})^2 = 1$. Ajungem de aici la $\operatorname{Re}(z_1) \in \left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$ și, deoarece $\operatorname{Re}^2(z_1) + \operatorname{Im}^2(z_1) = 1$, obținem $z_1 \in \left\{\pm\frac{1}{2} \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. □

X.133 Arătați că ecuația $\log_2(5-3x) = \log_3(2x-1)$ are o unică soluție reală x_0 și $x_0 \in \left(1, \frac{4}{3}\right)$.

Prof. Ion Dumitru Pistrilă, OL CS 2006

Soluție: Din $\log_2(5-3x) = \log_3(2x-1) = y$ deducem imediat: $2^{y+1} + 3^{y+1} = 7$; evident, funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(y) = 2^{y+1} + 3^{y+1}$ este strict crescătoare și astfel, **dacă** ecuația are soluție, aceasta este unică.Acum, folosim noțiuni intuitive de continuitate, proprietate pe care f o are. Deoarece $f(0) = 5 < 7, f(1) = 13 > 7$, ecuația are soluție;chiar mai mult, pentru $g(x) = \log_2(5-3x) - \log_3(2x-1)$ avem $g(1)g\left(\frac{4}{3}\right) < 0$. □

X.134 Determinați progresiile geometrice de numere naturale $(a_n)_{n\geq 0}$ pentru care suma $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot C_n^k$ este pătrat perfect pentru orice n natural.

Prof. Lucian Dragomir, Shortlist ONM, 2004

Soluție: Deoarece $(a_n)_{n\geq 0}$ este o progresie geometrică, avem că există $r \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ și astfel avem:

$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot C_n^k = ... = a_0 \cdot (r+1)^n$ care trebuie să fie pătrat perfect, pentru orice n natural. Dacă n este număr par, este necesar să avem $a_0 = x^2, x \in \mathbb{N}^*$ (și suficient ?) ; dacă n este impar, puteți finaliza ?

X.135 Fie $A = \{1,2,3,4,5\}$. Să se determine numărul funcțiilor $f : A \to A$ cu proprietatea că nu există numere distincte $a,b,c \in A$ astfel încât $f(a) = f(b) = f(c)$.

Concurs Iași, 2004

Soluție: Credem că este mai ușor să numărăm funcțiile pentru care există *a,b,c* distincte cu $f(a) = f(b) = f(c)$ și apoi să scădem acest număr din numărul total de funcții, care este(evident) egal cu 5^5.Deosebim astfel cazurile: 1) 5 funcții pentru care $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = f(e) = t \in A$; 2) $C_5^4 \cdot 5 \cdot 4$ funcții pentru care $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = t \in A$ și $f(e) \neq t$; 3) $C_5^3 \cdot 4 \cdot 4$ funcții pentru care $f(a) = f(b) = f(c) = t \in A$ și $f(d) \neq t, f(e) \neq t$. Avem așadar $5 + 100 + 800$ astfel de funcții, deci rezultatul cerut este 2220. □

X.136 Un triunghi ascuțitunghic *ABC* este înscris în cercul de centru *O*, *D* este simetricul lui *C* față de *O*, iar *I* este centrul cercului înscris în triunghiul *ABC*.Să se arate că patrulaterul *ADBI* este paralelogram dacă și numai dacă triunghiul *ABC* este echilateral.

Prof. Nicolae Mușuroia, Baia – Mare

Soluție: Considerăm afixele corespunzătoare unui reper cu originea în *O* și astfel avem: $A(a), B(b), D(-c), I(i)$.Evident, *ADBI* este paralelogram dacă și numai dacă $a + b = -c + i \Leftrightarrow i = a + b + c = h$ (afixul ortocentrului *H*) , adică $I = H \Leftrightarrow$ triunghiul *ABC* este echilateral. □

X.137 a) Să se arate că $2^x > x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve ecuația $x + 2^x = \frac{x}{2^x}$.

Prof. Adrian Troie, Sorin Rădulescu, București

Soluție: a) Pentru $x < 0$ inegalitatea este evidentă; pentru $x \in [0,1]$, avem $2^x \ge 2^0 = 1 \ge x$ (pentru $x = 1$ avem inegalitate clară); pentru $x > 1$ avem $2^x \ge 2^{[x]} = (1+1)^{[x]} \ge 1 + [x] > x$; b) folosind a) deducem:

$x + 2^x > 2x \Rightarrow \frac{x}{2^x} > 2x$, de unde $2^x < \frac{1}{2} \Rightarrow x < -1 < 0$.Acum, ecuația conduce la $x = \frac{2^{2x}}{1-2^x} < 0 \Rightarrow 2^x > 1 \Rightarrow x > 0$, contradicție, așadar ecuația nu are soluții. □

X.138 La un turneu de şah oricare doi participanți joacă o singură partidă.După ce au jucat câte două jocuri, 5 participanți părăsesc competiția.La finele turneului s-a constatat că numărul total de partide jucate este egal cu 100. Câți şahişti au participat inițial la turneu ?

Olimpiadă Moldova, 2007

Soluție: Presupunem că cei 5 jucători au jucat *m* partide cu jucători care au jucat până la sfârşit (deci avem *m* partide în care exact un jucător care ulterior părăseşte competiția participă). Aşadar $m \le 10$ (când oricare doi dintre cei 5 nu au jucat între ei) şi $m \ge 5$, atunci când joacă doar între ei. Dacă n este numărul de jucători care au terminat turneul, avem $C_n^2 + m = 100$ sau $90 \le C_n^2 \le 95$ sau $180 \le n^2 - n \le 190$, de unde $n = 14$.Aşadar inițial au fost 19 participanți. □

X.139 Pe un cerc se fixează $n+3$ puncte distincte($n \ge 3$), dintre care n se colorează cu roşu, două se colorează cu galben şi unul cu albastru. Să se determine:

a) numărul poligoanelor monocolore;

b) numărul poligoanelor bicolore;

c) numărul poligoanelor tricolore.

Prof.Vasile Pop, Cluj – Napoca, Concurs 2008

Soluție:a) Poligoanele monocolore sunt formate,evident,din puncte roşii(oricare 3 sau mai multe puncte roşii formează un poligon monocolor)Numărul total cerut este astfel egal cu: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k - C_n^0 - C_n^1 - C_n^2 = 2^n - 1 - n - \frac{n(n-1)}{2}$; b)numărul poligoanelor bicolore este egal cu $3(2^n - n - 1) + (2^n - 1) + 1$, unde primul termen reprezintă poligoanele formate din cel puțin două vârfuri roşii şi un vârf de altă culoare, al doilea termen reprezintă numărul poligoanelor formate din cel puțin un vârf roşu şi două galbene, iar al treilea termen reprezintă triunghiul format cu vârfurile galbene şi cel albastru. □

Clasa a XI-a

XI.131 Să se arate că pentru orice matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, avem

$$\frac{1}{2}\left[\det(A+iB) + \det(A-iB)\right] = \det(A) - 1.$$

Cosmin Istodor, student, Timişoara

Soluție: Se consideră polinomul $P(X) = \det(A + XB) = X^2 - (TrA)X + \det A$ şi se calculează $P(i) + P(-i)$.□

XI.132 Să se arate că există un şir $(a_n)_{n\ge1}$ de numere reale cu proprietatea că $a_{n+1} = \sqrt{a_n + \alpha}, \forall n \ge 1$, dacă şi numai dacă $\alpha \ge -\frac{1}{4}$.

Prof. Marina Constantinescu, Tismana

Soluție: Presupunem că $\alpha < -\frac{1}{4}$ şi $(a_n)_{n\ge1}$ cu $a_{n+1} = \sqrt{a_n + \alpha}, \forall n \ge 1$, de unde $a_{n+1} = \sqrt{a_n + \alpha} < \sqrt{a_n - \frac{1}{4}} \le \sqrt{a_n^2} = |a_n| = a_n, \forall n \ge 2$ (deoarece $a_n \ge 0, \forall n \ge 2$).Avem astfel că $(a_n)_{n\ge2}$ este descrescător şi mărginit, adică este convergent ;dacă $l = \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$, prin trecere la limită în relația de recurență, deducem : $l^2 - l - \alpha = 0$ .Cum $\Delta = 1 + 4\alpha < 0$,avem : $l \notin \mathbb{R}$, contradicție.De remarcat că pentru $\alpha \ge -\frac{1}{4}$ putem considera şirul constant $a_n = \frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}, n \ge 1$, care verifică relația dată. □

XI.133 Se consideră mulțimea $M=\left\{A=\begin{pmatrix}1&0&a\\b&1&0\\0&c&1\end{pmatrix}\middle|\, a,b,c\in\mathbb{Z}\right\}$.

a) Să se arate că dacă $A\in M$ și $A\cdot A^t\in M$, atunci $A=I_3$.

b) Să se determine inversa matricei $(A-I_3)^2$, știind că $A\in M$ nu este inversabilă.

c) Să se demonstreze că pentru orice matrice $X\in M$ cu $\det X=0$ mulțimea $\left\{(X-I_3)^n \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$ este finită.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Soluție: a) $A\cdot A^t\in M\Rightarrow a=b=c=0\Rightarrow A=I_3$; b) $\det A=0\Rightarrow a,b,c\in\{-1,1\}$ și se obține imediat că inversa căutată este I_3-A; c) pentru orice $X\in M$ cu $\det X=0$, cu notația $Y=X-I_3$, avem: $Y^3=-I_3\Rightarrow Y^6=I_3$, așadar mulțimea considerată este $\{I_3,Y,Y^2,Y^3,Y^4,Y^5\}$, deci este finită. □

XI.134 Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2&2a&b+c\\2&2b&c+a\\2&2c&a+b\end{pmatrix}$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$, distincte două câte două.

a) Să se determine *rang A*.

b) Să se arate că există matricele $B,C\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A=B+C$ și $\det(B+C)=\det B+\det C$.

c) Să se demonstreze că dacă $a+b+c=3$, atunci orice soluție (x_0,y_0,z_0) a sistemului $AX=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ verifică relația $x_0+y_0+z_0=\frac{1}{2}$.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Soluție: a) $\det A=...=0$ și există un minor de ordinul 2 nenul, rezultă $rangA=2$; b) de exemplu, $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\2&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0&2a&b+c\\0&2b&c+a\\0&2c&a+b\end{pmatrix}$ satisfac condițiile din enunț (verificare !); c) adunăm cele trei ecuații ale sistemului și folosim ipoteza. □

XI.135 Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu rația $r>0$ cu proprietatea că între oricare doi termeni consecutivi ai progresiei există exact un număr natural. Atunci $r=1$.

Prof. Mircea Constantinescu, Tg-Jiu

Soluție: Din enunț se deduce că între a_1 și a_{n+1} există exact n numere naturale, adică $n-1\leq a_{n+1}-a_1\leq n+1, \forall n\in\mathbb{N}^*$ sau $n-1\leq r\cdot n\leq n+1, \forall n\in\mathbb{N}^* \Leftrightarrow \frac{n-1}{n}\leq r\leq\frac{n+1}{n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Prin trecere la limită pentru $n\to\infty$ obținem $r=1$. □

XI.136 Se dă șirul de numere reale definit prin $x_1>0, x_{n+1}=x_n+\sqrt{x_n}, \forall n\geq 1$. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}$.

Concurs Brașov, 2008

Soluție: a) Avem imediat că șirul este strict crescător(justificați!), deci are limita $l\in\overline{\mathbb{R}}$;presupunând că limita este finită, prin trecere la limită în relația de recurență obținem $l=0$, contradicție cu stricta monotonie, așadar $l=\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x_n}}{x_n}\right)=1$; c) cu lema Cesaro-Stolz avem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{x_n}}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{x_{n+1}}-\sqrt{x_n}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{\sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{x_n}}{\sqrt{x_{n+1}}+\sqrt{x_n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x_{n+1}}{x_n}}+1}=\frac{1}{4}. \square$$

XI.137 Fie A şi B două matrici pătratice de ordin $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, cu proprietatea că există $\alpha \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $\alpha \cdot A \cdot B + A + B = 0_n$. Să se arate că $A \cdot B = B \cdot A$.

Prof. Ciprian Călin, Reşiţa

Soluţie: Din $\alpha \cdot A \cdot B + A + B = 0_n$ deducem imediat

$\alpha^2 \cdot A \cdot B + \alpha \cdot A + \alpha \cdot B + I_n = I_n$
$\Rightarrow (\alpha A + I_n)(\alpha B + I_n) = I_n$, aşadar $\alpha A + I_n$ este inversabilă, cu inversa $\alpha B + I_n$, de unde $(\alpha B + I_n)(\alpha A + I_n) = I_n$ şi apoi

$\Rightarrow (\alpha A + I_n)(\alpha B + I_n) = (\alpha B + I_n)(\alpha A + I_n)$

$\Rightarrow \alpha^2 AB = \alpha^2 BA \Rightarrow AB = BA$

XI.138 Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă în $x_0 = 1$ şi care are proprietatea că $f(x) = f(x^2 - x + 1), \forall x \in [0,1]$. Arătaţi că *f* este constantă.

Olimpiadă locală Olt, 2008

Soluţie: Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0 = x \in [0,1]$, $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se arată imediat că şirul este crescător şi, inductiv, că este mărginit, deci şirul este convergent; se obţine apoi că limita sa este 1. Relaţia din ipoteză se poate acum scrie:
$f(x) = f(x_1) = f(x_2) = ... = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall x \in [0,1]$; deoarece limita şirului este 1, iar *f* este continuă în $x = 1$, deducem că:
$f(x) = f(1), \forall x \in [0,1]$. □

XI.139 Determinaţi funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care există $k \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $f(0) = 1$ şi $f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = kx, \forall x \in \mathbb{R}$.

Olimpiadă locală Satu – Mare, 2008

Soluţie: $f(x) = kx + f\left(\frac{x}{2}\right) = kx + \frac{kx}{2} + f\left(\frac{x}{2^2}\right) = ... = k \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{x}{2^i} + f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$.

Trecem la limită pentru $n \to \infty$, folosind continuitatea funcţiei date în $x = 0$, ajungem la $f(x) = 2kx + f(0)$. □

Clasa a XII-a

XII.130 Fie p un număr prim, $p \geq 2$ şi polinomul $f = X^3 - (p-2)X - p + 1$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Să se determine p ştiind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ este număr natural divizibil cu 4.

b) Să se demonstreze că polinomul f nu poate avea o rădăcină dublă întreagă.

c) Să se determine p ştiind că mulţimea rădăcinilor polinomului f formează grup în raport cu operaţia de înmulţire a numerelor complexe.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Soluţie: a) cu relaţiile lui Viete ajungem imediat la $p = 2$; b) dacă *a* ar fi rădăcina dublă, întreagă, am avea $f(a) = f'(a) = 0$; se ajunge imediat la $1 - 2a^3 = p$, absurd, deoarece *p* este număr prim. □

XII.131 Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{\ln(x^n + 1)}{x+1} dx$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine I_1.

b) Să se arate că $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Prof. Lucian Petrescu, Tulcea

Soluţie: a) dacă $u(x) = \ln(1 + x)$, avem: $I_1 = \int_0^1 u(x)u'(x)dx = \frac{1}{2}\ln^2 2$; b)

Considerând funcţia $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(1 + x) - x$, se demonstrează imediat (!) că $f(x) \leq f(0), \forall x > -1$, deci

$0 \leq \ln(1 + x^n) \leq x^n, \forall x \in [0,1]$ şi de aici: $0 \leq I_n \leq \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.

Folosim acum teorema "cleştelui".

XII.133 Dacă *P* este un polinom de gradul 2008 şi $P(k) = \frac{k}{k+1}, \forall k = \overline{0, 2008}$, calculaţi $P(2009)$.

* * *

Soluție: Considerăm $Q(X)=(X+1)P(X)-X$ şi deducem imediat că: $Q(X)=a(X-1)(X-2)...(X-2008)$; calculăm $Q(0)$ şi ajungem la $(X+1)P(X)-X=-\frac{1}{2009!}(X-1)(X-2)...(X-2008)$, de unde $P(2009)=\frac{2008}{2010}$. □

XII.134 Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care admit primitive şi $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Concurs Galați, 2008

Soluție: Considerăm $f(x)=g(x)+x^3, x\in\mathbb{R}$ şi avem astfel că g admite primitive;în plus, g satisface $g(x+y)=g(x)+g(y), \forall x,y\in\mathbb{R}$.Fixăm y şi considerăm o primitivă G a lui g, deci:

$\left(G(x+y)-G(x)\right)'=g(y)\Rightarrow G(x+y)=G(x)+xg(y)+c$, unde $c=c(y)$ este aici o constantă. Dacă luăm $x=0$, ajungem la $c(y)+G(0)=G(y)$, de unde $G(x+y)=G(x)+G(y)+G(0)+xg(y)$; pentru $x=1$ şi y variabil avem de aici: $g(y)=G(1+y)-G(y)-G(0)$, aşadar g este derivabilă, deci continuă şi, deoarece satisface $g(x+y)=g(x)+g(y), \forall x,y\in\mathbb{R}$, deducem(Cauchy): $g(x)=kx$, unde k este o constantă. Aşadar: $f(x)=x^3+kx.$ □

XII.135 Determinați funcțiile strict crescătoare $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ pentru care $\left|\int_0^1 f(x)e^{nx}dx\right|\le 2008$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Concurs Iaşi, 2008

Soluție: Dacă există $t\in(0,1)$ cu $f(t)>0$, atunci

$$\int_0^1 f(x)e^{nx}dx=\int_0^t f(x)e^{nx}dx+\int_t^1 f(x)e^{nx}dx\ge f(t)\int_t^1 e^{nx}dx+f(0)\int_0^t e^{nx}dx=$$

$=f(t)\left(\frac{e^n}{n}-\frac{e^{nt}}{n}\right)+f(0)\left(\frac{e^{nt}}{n}-\frac{1}{n}\right)$. Prin trecere la limită pentru $n\to\infty$, obținem $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)e^{nx}dx=\infty$, contradicție. Aşadar $f(x)\le 0, \forall x\in(0,1)$.

Notăm acum $g=-f$, deci g este descrescătoare;dacă $g(0+o)=0$, atunci $g=0, f=0$ pe $(0,1)$; dacă $g(0+o)=l$, atunci există $a\in(0,1)$ cu $g(x)\ge\frac{l}{2}$, pentru $x\in[0,a]$.Deducem că $\int_0^1 g(x)e^{nx}dx\ge\int_0^a g(x)e^{nx}dx\ge\frac{1}{2}\int_0^a e^{nx}dx=\frac{l}{2}\left(\frac{e^{na}}{n}-\frac{1}{n}\right)$, de unde, prin trecere la limită, ajungem la $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 g(x)e^{nx}dx=\infty$, contradicție.Deci:

$$f(x)=\begin{cases}\alpha<0 & ,x=0\\ 0 & ,x\in(0,1)\\ \beta>0 & ,x=1\end{cases}.\ \square$$

XII.136 Să se arate că: $1\le\int_2^4\frac{1}{\sqrt{6x-x^2-5}}dx\le\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

Soluție: Folosind cunoştințe de clasa a IX-a avem, pentru $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+6x-5$: $f(x)\in[3;4]$, $\forall x\in[2;4]$, de unde: $\int_2^4\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\in\left[\frac{1}{\sqrt{4}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.Inegalitatea propusă e acum imediată.

XII.137 a) Fie G un grup finit şi A *o* submulțime a lui G astfel încât $card(A)>\frac{1}{2}card(G)$. Demonstrați că pentru orice $g\in G$ există $a_1,a_2\in A$ astfel încât $g=a_1a_2$.

b) Fie K un corp finit. Demonstrați că pentru orice $x\in K$, există $u,v\in K$ astfel încât $x=u^2+v^2$.

Concurs Târgovişte, 2008

Soluție: a) Fie $g\in G$ şi $B=\left\{ga_2^{-1}/a_2\in A\right\}$; remarcă, faptul că $cardA=cardB$ şi, cum din ipoteză avem $card(A)+card(A)>card(G)$ se ajunge la $card(A)+card(B)>card(G)\Rightarrow A\cap B\ne\varnothing$. Aşadar există $a_1\in A$ care se scrie sub forma ga_2^{-1}, $a_2\in A$, adică: $g=a_1a_2$.

b) Considerăm $C=\left\{x^2/x\in K\right\}$; din $x^2=y^2$, $x,y\in K$, avem $x^2-y^2=0$ Cum K este corp finit, el este comutativ şi ajungem la $(x-y)(x+y)=0$,

de unde $x-y=0$ sau $x+y=0$, aşadar C conţine câte un număr din perechile de forma $(x,-x), x\in K^*$ şi pe 0, deci $card(C)>\frac{1}{2}card(K)$.Aplicăm acum rezultatul de la a). □

XII.138 Să se arate că oricare ar fi numerele reale a şi b şi $n\in\mathbb{N}^*$, avem

$$\left(\int_a^b \cos^n x dx\right)\cdot\left(\int_a^b \cos^{n+1} x dx\right)=\frac{1}{n+1}(a-b)(\sin a-\sin b).$$

Prof.Ciprian Călin, Reşiţa

Soluţie: Notăm $I_k=\int_a^b \cos^k x dx$. Avem imediat $I_0=\int_a^b dx=b-a$ şi $I_1=\int_a^b \cos x dx=\sin b-\sin a$ .Apoi deducem $I_k=\frac{k-1}{k}\cdot I_{k-2},(\forall)k\in N^*,k>1\ (*)$.

Avem: $I_2=\frac{1}{2}I_0=\frac{1}{2}(b-a)\Rightarrow I_1\cdot I_2=\frac{1}{2}(b-a)(\sin b-\sin a)$

$\Rightarrow I_1\cdot I_2=\frac{1}{2}(a-b)(\sin a-\sin b)$. Pentru $k=2,3,........n+1$, înmulţim egalităţile din $(*)$ şi ajungem la $I_n\cdot I_{n+1}=\frac{1}{n+1}(a-b)(\sin a-\sin b)$.□

XII.139 Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\ln x$. Să se arate că pentru orice $x\in\mathbb{R}$, ecuaţia $f(t)=x$ are o soluţie unică $t=\varphi(x)$. Să se arate apoi că $\varphi:\mathbb{R}\to(0,\infty), x\to\varphi(x)$ este derivabilă şi să se calculeze $I=\int_1^{1+e}\frac{dx}{1+\varphi(x)}$.

Olimpiadă locală Olt, 2008

Soluţie: Deoarece *f* este continuă şi chiar derivabilă, cu $f'(x)>0,\forall x>0$, avem că *f* este strict crescătoare şi, în plus, $\lim_{x\to 0}f(x)=-\infty,\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$; aşadar funcţia este bijectivă, deci ecuaţia $f(t)=x$ are o unică soluţie $t=\varphi(x)$, iar $\varphi(x)$ este inversa funcţiei considerate, deci este deasemenea derivabilă. Facem acum schimbarea de variabilă

$x=f(y)\Rightarrow dx=f'(y)dy$, de unde $I=\int_1^e\frac{f'(y)}{1+y}dy=...=1$. □

Probleme propuse
(se primesc soluţii până în data de 20 noiembrie 2009, nu mai târziu !)

Notă: Se pot trimite şi soluţii la problemele propuse în articolele apărute în ultimele două numere ale revistei. Respectaţi cu stricteţe normele de expediere, in special scrieţi pe plic, jos în stânga, clasa în care sunteţi acum!!

Clasa I

I.21. Care este diferenţa dintre cel mai mare număr par, scris cu două cifre egale şi cel mai mic număr impar, scris cu două cifre diferite?

Inst.Nicoleta Marcu, Reşiţa

I.22. Trei numere se laudă. Primul zice:
- Eu sunt cel mai mare. Am zeci 7, frăţioare!
Al doilea număr spune:
- Eu duc în spinare 70 de unităţi!
Al treilea număr adaugă:
- Iar eu sunt format din cinci zeci şi 20 de unităţi!
Spuneţi voi, copii, care dintre cei trei lăudăroşi este mai mare!

Inst.Nicoleta Marcu, Reşiţa

I.23. Diana a primit culori,
Şi-acum desenează flori,
Două mari şi vreo trei mici.
Cinci ghivece,
Opt pitici.
Nori, vreo zece.
Un blând soare,
Trei copaci
Şi vreo unsprezece maci.
Câte lucruri are ea,
În desen?
Puteţi afla?

Inst.Nicoleta Marcu, Reşiţa

I.24. Adaugă la cel mai mare număr par scris cu o cifră vecinii săi. Cât ai obţinut?

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

I.25. Daniel are 10 CD-uri.El îi împrumută lui Andrei 3 CD-uri şi lui Alex tot atâtea. Cu câte CD-uri rămâne Daniel?

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

I.26. Mă gândesc la un număr.Îl micşorez cu 35 şi obţin răsturnatul acestuia.La ce număr m-am gândit?

Inst. Mariana Mitrică, Reşiţa

I.27. Familia Savu are trei copii;Amalia,Bianca şi Carolina.Fiecare dintre fete mănâncă în fiecare dimineaţă câte un iaurt.Câte iaurturi mănâncă într-o săptămână copiii familiei Savu?

Carolina Savu, elevă, Moldova-Nouă

I.28. Amalia primeşte luni de la părinţi 5 lei şi apoi, în fiecare zi a săptămânii, primeşte cu un leu mai mult decât în ziua precedentă.
a) Câţi lei primeşte Amalia vineri ?
b) Dacă luni este chiar 14 septembrie, câţi lei strânge Amalia până la sfârşitul lunii septembrie, dacă nu cheltuieşte niciun leu ?

Carolina Savu, elevă, Moldova-Nouă

I.29. Bianca are 8 ani, sora ei Amalia este cu 4 ani mai mică, iar sora lor, Carolina, are cu 5 ani ani mai mulţi decât Amalia.Peste câţi ani cele trei surori vor avea, împreună, 30 de ani ?

Carolina Savu, elevă, Moldova-Nouă

1.30. Amalia are o colecţie formată din 36 de şerveţele roşii, 28 de şerveţele galbene şi 19 şerveţele verzi. Câte şerveţele are Amalia după ce îi dă surorii sale Bianca câte 5 şerveţele din fiecare culoare?

Carolina Savu, elevă, Moldova-Nouă

Clasa a II-a

II.21. Dinu a scris pe un carton un număr de o cifră, apoi a mai adăugat o cifră în dreapta acestui număr. Din numărul astfel format a scăzut 15, obţinând 63. Care a fost numărul iniţial?

Inst. Niculina Bobescu, Reşiţa

II.22. Un bilet de intrare la cinematograf costă pentru un adult 9 RON, iar un bilet de copil este cu 4 RON mai ieftin. Câţi lei(RON) plăteşte un tată care intră la cinematograf cu cei trei copii şi soţia lui?

Inst. Niculina Bobescu, Reşiţa

II.23. Un grup de fete dintr-o clasă a strâns 18 kg de mușețel și cu 9 kg mai mult tei. Grupul de băieți a strâns 15 kg de mușețel și cu 7 kg mai puțin tei.Care grup a strâns mai multe plante și cu cât ?

Inst.Neta Novac, Reșița

II.24. Alina și-a propus să rezolve 65 de probleme în 6 zile astfel : în prima zi să rezolve 8 probleme, în următoarele zile cu câte una mai mult decât în ziua precedentă, iar restul în a șasea zi.
Câte probleme a rezolvat în ultima zi ?

Inst.Neta Novac, Reșița

II.25. Ana are 21 bomboane, iar Maria cu două bomboane mai multe. Paul are tot atâtea cât au cele două fete la un loc.Numărul bomboanelor lui Cosmin este egal cu diferența dintre 99 și suma dintre numărul bomboanelor celor trei copii. Câte bomboane are Cosmin?

Inst. Elena Crîsta, Reșița

II.26. Care este numărul casei Mariei, dacă știm că este scris cu trei cifre consecutive, suma cifrelor este 18, iar suma zecilor și unităților este 13 ?

Inst. Elena Crîsta, Reșița

II.27. Scrie toate numerele care se pot forma cu ajutorul cifrelor 5, 7 și 0, luate o singură dată.Câte numere ai obținut?

Inst. Mariana Mitrică, Reșița

II.28. O familie are patru copii: Anca, Dani, Sorin și Ioana.
Anca este mai tânără decât Dani, dar mai mare decât Sorin.Ioana s-a născut înaintea lui Sorin, dar este mai mică decât Anca.
Care este cel mai mare dintre frați? Dar cel mai mic?

Inst. Mariana Mitrică, Reșița

II.29. Găsiți două numere care au suma egală cu 18, știind că unul dintre numere este de cinci ori mai mare decât celălat.

Anisia Popa, elevă,Caransebeș

II.30. M-am gândit la un număr .Dacă i-am adunat numărul 29, am obținut un număr format din opt zeci și șapte unități.
La ce număr m-am gândit?

Inst.Neta Novac, Reșița

Clasa a III-a

III.21. Care este treimea jumătății numărului 300?

Inst. Niculina Bobescu, Reșița

III.22. La un concurs au fost împărțite 49 de cărți. Dacă fiecare câștigător a primit două cărți de poezii, două cărți de povești și trei culegeri de probleme, câți copii au câștigat concursul?

Inst. Niculina Bobescu, Reșița

III.23. Ana are două surori. Una are 19 ani, cealaltă cu 5 ani mai puțin, iar Ana are cât aveau surorile ei împreună acum 5 ani. Câți ani are Ana?

Inst. Niculina Bobescu, Reșița

III.24. Într-o ladă sunt 30 kg struguri.
Câte kg vor cântări 10 lăzi goale dacă lada plină are 32 kg?

Inst. Mariana Mitrică, Reșița

III.25. Calculează triplul sfertului numărului lunilor dintr-un an.

Inst. Mariana Mitrică, Reșița

III.26. Patru cărți de același fel costă 28 lei.
Ce rest primește Denis de la 100 lei dacă el cumpără nouă cărți?

Inst. Mariana Mitrică, Reșița

III.27. Bunicul are 48 animale. Jumătate sunt oi, un sfert sunt vaci, 3 sunt porci, iar restul sunt capre. Câte capre are bunicul?

Inst. Elena Crîsta, Reșița

III.28. Într-o livadă erau meri, peri și cireși. Împreună, meri și peri erau 573, meri și cireși erau 666, iar peri și cireși erau 757. Câți pomi de fiecare fel se aflau în livadă?

Inst. Elena Crîsta, Reșița

III.29. Suma a trei numere este 1000. Care sunt numerele dacă suma primelor două este 809, iar a ultimelor două cu 122 mai mică decât aceasta?

Înv. Ana Modoran, Reșița

III.30. Să se afle diferența știind că descăzutul este suma dintre cel mai mare număr impar de 3 cifre distincte cu cel mai mare număr par de 3 cifre, iar scăzătorul este cel mai mic număr natural scris cu 3 cifre distincte a căror sumă este 4.

Înv. Ana Modoran, Reșița

Clasa a IV-a

IV.150. Câte fulare se pot cumpăra în loc de un palton, ştiind că: un palton costă cât 10 cămăşi, 5 cămăşi costă cât un costum, 2 costume costă cât 5 perechi de pantofi şi10 perechi de pantofi costă cât 100 de fulare.

Înv. Elisaveta Vlăduț, Reşița

IV.151. Micşorând cu 10 triplul unui număr natural, se obține un număr natural mai mare cu 100 decât dublul numărului inițial.Care a fost numărul inițial?

Înv. Elisaveta Vlăduț, Reşița

IV.152. Într-o fermă sunt 10500 animale. 2000 sunt porci, cu 135 sunt mai multe vaci, oi cât porci şi vaci la un loc. Restul sunt capre.
a. Câte capre sunt la fermă?
b. Dacă porci ar fi pe jumătate din câți sunt, atunci câte capre ar fi?
c. Presupunând că o cincime din numărul vacilor aduc pe lume câte doi vițeluşi şi restul câte unu, află câte bovine ar fi în fermă.

Inst.Cristina Ardeleanu, Reşița

IV.153. Un elev economiseşte bani pentru o excursie. Dacă ar depune lunar la CEC câte 80 lei, îi mai lipsesc la data stabilită 40 lei, iar dacă ar depune lunar câte 100 lei, ar strânge suma necesară cu 2 luni mai devreme. Care este costul excursiei?

Înv. Elisaveta Vlăduț, Reşița

IV.154. Să se afle un număr natural de 4 cifre distincte, ştiind că dacă-i aşezăm în fața cifra 8, obținem un număr de trei ori mai mare decât numărul ce s-ar obține din numărul inițial cu cifra 6 aşezată la sfârşit.

Înv. Elisaveta Vlăduț, Reşița

IV.155. Pentru a transporta o cantitate de nisip, necesară pe un şantier, sunt necesare 10 camioane de 18 t. Întrucât firma de transport dispune doar de camioane de 15 t şi de 9 t, să se afle:

a) Câte camioane de 15 t sau câte de 9 t ar fi necesare pentru transportarea nisipului?
b) Câte camioane de 15 t şi 9 t se vor trimite pentru a duce nisipul într-un singur transport, ştiind că sunt doar 5 camioane de 9 t?

Inst.. Elena Crîsta, Reşița

IV.156. Într-o cutie sunt bile de trei culori: roşii, galbene şi negre. Numai 54 din ele nu sunt negre şi numai 63 din ele nu sunt roşii. Numărul bilelor roşii este de două ori mai mic decât numărul bilelor negre.Câte bile de fiecare culoare sunt în cutie?

Înv. Elisaveta Vlăduț, Reşița

IV.157. Calculând suma unor numere, Denis a obținut cel mai mic număr scris cu patru cifre.Înmulțind aceleaşi numere, a obținut produsul 41.
Care sunt numerele?

Inst. Mariana Mitrică, Reşița

IV.158. Raluca şi-a propus să lucreze în vacanța de vară câte 5 probleme zilnic.Rezolvând câte 7 probleme pe zi, ea a reuşit să termine culegerea cu două săptămâni mai devreme.Câte probleme are culegerea?

Inst. Mariana Mitrică, Reşița

IV.159. Alin cumpără o culegere şi 4 caiete. O culegere este de 6 ori mai scumpă decât un caiet şi costă cu 15 lei mai mult. Câți lei a cheltuit Alin ?

Înv. Ana Modoran, Reşița

Clasa a V-a

V.150 Determinați numerele de forma $\overline{abc}$ ştiind că $\overline{abc}+abc=138$

Prof. Otilia Bejan, Reşița

V.151 Determinați numerele naturale *x,y,z* pentru care avem: $2^{2x}+2^{2y+1}+2^{2z+2}=112$

Prof. Otilia Bejan,Reşița

V.152 Aflați cel mai mare număr natural *n* de trei cifre pentru care $a_n=1+2+2^2+2^3+...+2^n$ este divizibil cu 7.

Prof. Otilia Bejan, Reşița

V.153 Arătați că numărul $a=13^{2009}$ se poate scrie ca sumă a două pătrate perfecte, iar numărul $b=9^{2008}$ se poate scrie ca sumă a două cuburi perfecte.

Anca Ciobanu,elevă,Reşița

V.154 Arătați că numărul
$A = 1\cdot 2 + 3\cdot 4 + 5\cdot 6 + 7\cdot 8 + ... + 2007\cdot 2008 + 2009\cdot 2010$
este divizibil cu 10.

Prof. Marius Şandru,Reşiţa

V.155 Dacă *a, b, c* sunt numere naturale pentru care $2a + b + c = 55$ şi $3a + 2b + c = 86$, calculați $5a + 4b + c$.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

V.156 Ordonați crescător numerele: $a = 3^{21}$, $b = 2^{31}$, $c = 3^{18}$.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

V.157 La un concurs de cunoştinţe generale se primesc 4 puncte pentru un răspuns corect şi se pierde 1 punct pentru un răspuns greşit. După 50 de întrebări, Răzvan are 0 puncte. Câte răspunsuri corecte a dat Răzvan?

OJ Gorj, 2000

V.158 Arătați că dacă $2n+1$ şi $3n+1$, $n \in \mathbb{N}$ sunt simultan pătrate perfecte, atunci *n* este multiplu de 5. Dați un exemplu de număr natural nenul *n* pentru care $2n+1$ şi $3n+1$ sunt pătrate perfecte.

Prof. Dorel Miheț, Timişoara

V.159 Arătați că $3 \,\big|\, \left(\overline{ab} + b\right) \Leftrightarrow 3 \,\big|\, \left(\overline{ba} + 2a\right)$

Prof. Camelia Bădoiu, Turnu Măgurele

Clasa a VI-a

VI.150 Determinați numerele prime *a,b,c* pentru care $a^6 + b^2 + c = 80$

Prof. Otilia Bejan, Reşiţa

VI.151 Determinați numerele naturale *a* şi *b* pentru care $2^a + 3^b = 244$.

Prof. Marius Şandru, Reşiţa

VI.152 Dacă $x, y \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, calculați $B = \frac{12x^2 + 18y^2}{35xy}$.

Prof. Marius Şandru,Reşiţa

VI.153 Arătați că nu există numere naturale *a* şi *b* pentru care

$$3a^2 + 5b^2 = 7^{2010}$$

OL Botoşani, 2009

VI.154 Determinați ultimele două cifre ale numărului

$$A = 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{2007} + 3^{2008}$$

OL Botoşani, 2009

VI.155 Dacă *a, b, c* sunt numere naturale pentru care $2a + b + c = 13^2$ şi $3a + 2b + c = 16^2$, studiați dacă $4a + 3b + c$ poate fi pătrat perfect.

Prof. Antoanela Buzescu, Caransebeş

VI.156 Determinați numerele întregi *a, b, c* pentru care

$$3a + bc = 0 \text{ şi } \frac{a+b}{2a+1} = \frac{b+c}{2b-5} = \frac{c+a}{2c+4}$$

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

VI.157 Fie *[AB]* un segment dat. Arătați că oricare ar fi $M \in (AB)$, există o infinitate de perechi de puncte (P,Q) astfel încât perimetrele triunghiurilor *PAM* şi *QBM* să fie egale.

Prof. Petre Simion, Bucureşti

VI.158 La un cerc de matematică profesorul are pregătite $3n+9$ probleme pe care le împarte în mod egal celor $2n+2$ elevi ($n \in \mathbb{N}$). Aflați numărul elevilor prezenți la cerc, ştiind că acesta este mai mare decât 10.

OJ Constanța, 2000

VI.159 Se dă numărul $T = \overline{abc}$ scris în baza 10, unde *a,b,c* sunt cifre nenule. a) Demonstrați că suma resturilor împărțirii numărului *T* la *a, b,* respectiv *c*, este mai mică decât 24;

b) Demonstrați că suma resturilor împărțirii numărului *T* la *a, b,* respectiv *c* , nu poate fi egală cu 23.

OL Botoşani, 2009

Clasa a VII-a

VII.150 Determinați cel mai mic număr natural n pentru care $\frac{1}{n} < \frac{11-\sqrt{105}}{2}$.

Prof. Loreta Ciulu, Reşița

VII.151 Demonstrați că:

$$\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{4}{2\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 4}+...+\frac{n+2}{n(n+1)}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}\right)<2,\ \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$$

OL Botoşani, 2009

VII.152 Determinați $n \in \mathbb{Z}$ pentru care $\left(\frac{n-2008}{2010}+\frac{n-2010}{2008}\right)\in\mathbb{Z}$

OL Botoşani, 2009

VII.153 Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,...,96\}$. Arătați că pentru orice $x\in A$, există $y\in A$ astfel încât restul împărțirii lui $x\cdot y$ la 97 să fie 1.

OJ Iaşi, 2000

VII.154 Arătați că nu există numere naturale a şi b pentru care numărul $A=4^a+4^b+2^a+2^b+2^{a+b+1}$ este pătrat perfect.

OJ Alba, 2000

VII.155 Se consideră un trapez $ABCD$ în care $AB//CD$, $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d$, $AC=m, BD=n$ şi $m^2+n^2=(a+c)^2$. Demonstrați că:

a) $AC\perp BD$; b) $ac<bd$.

Prof. Sorin Peligrad, Piteşti

VII.156 Studiați natura patrulaterului convex $ABCD$ în care P este mijlocul lui *(BC)*, Q este mijlocul lui *(CD)*, $AP\cap BQ=\{R\}$, $AR=4\cdot RP$ şi $5\cdot RQ=3\cdot BQ$.

Prof. Vasile Şerdean, Gherla

VII.157 Determinați numerele naturale n pentru care $\frac{\sqrt{7}+2\sqrt{n}}{2\sqrt{7}-\sqrt{n}}\in\mathbb{Z}$

RMT 2000

VII.158 Arătați că nu există niciun număr rațional x astfel încât

$$x^3+2x-1=0.$$

Prof. Lucian Dragomir, Oțelu – Roşu

VII.159 Pe laturile triunghiului oarecare ABC cu $m(\measuredangle BAC)<60^o$, se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABM şi ACN. Se consideră punctul S astfel ca $ANSM$ să fie paralelogram. Demonstrați că triunghiul BSC este echilateral.

OL Botoşani, 2009

Clasa a VIII-a

VIII.150 Volumul unui paralelipiped dreptunghic este 1 cm^3. Arătați că mărindu-i fiecare dimensiune cu 1 cm, volumul noului paralelipiped este cel puțin 8 cm^3.

Red. RMCS

VIII.151 Arătați că pentru orice $m\in\mathbb{N}$, există numerele naturale *n, a, b, c* astfel încât: $169^m+13^n=a^2+b^2+c^2$.

GM 1999

VIII.152 Dacă numerele naturale *a, b, c* satisfac $a^2=b^2+c^2$, arătați că:

$$\frac{bc}{a+b+c}\in\mathbb{N}.$$

GM 1999

VIII.153 Pe perpendiculara în A pe planul triunghiului ABC, dreptunghic în A, se ia punctul M astfel încât $MA=m$. Se notează $AB=c, BC=a, CA=b$ şi se consideră punctele oarecare *P, Q, R* şi *S* pe dreptele *AB, AC, MB, MC*. Demonstrați că:

$$\frac{1}{RQ^2}\leq\frac{1}{m^2}+\frac{1}{c^2}\ \text{ şi }\ \frac{1}{PS^2}\leq\frac{1}{m^2}+\frac{1}{b^2}$$

Prof. Constantin Apostol, Rm.Sărat

VIII.154 Determinați numerele reale x şi y pentru care:

$$\sqrt{(5-x)(2x-y)}+\sqrt{(x+y)(3-2x)}=4$$

OJ Dâmbovița, 2000

VIII.155 Pătratul *ABCD* şi triunghiul echilateral *ABE* sunt incluse în plane distincte. Se consideră punctele $M, N \in (AB)$ astfel încât $AM = MN = NB$ şi se notează cu *G*, respectiv *F* centrele de greutate ale triunghiurilor *BEM* şi *ADN.* Demonstraţi că $FG \,/\!/ (CDE)$.

OL Botoşani, 2009

VIII.156 Determinaţi perechile (a,b) de numere întregi care verifică egalitatea: $2(a+b)^2 + 3(a+b) + ab + 4 = 0$.

Concurs Iaşi 2009

VIII.157 Se consideră un tetraedru regulat cu muchia de lungime 3, iar pe suprafaţa acestuia se consideră 37 de puncte.Arătaţi că printre aceste puncte există două astfel încât distanţa dintre ele este cel mult egală cu 1.

Concurs Iaşi 2009

VIII.158 Fie triunghiul echilateral *ABC* şi punctul *D* situat pe latura *(AC)*. Bisectoarea unghiului $\measuredangle ABD$ intersectează paralela prin *A* la *BC* în punctul *E*. Arătaţi că: $AE + DC = BD$.

Prof. Cristian Lazăr, Iaşi

VIII.159 Fie triunghiul *ABC* şi punctul *D* situat pe latura *[BC]*. Arătaţi că: $AB \cdot DC + AC \cdot BD \geq AD \cdot BC$.

Concurs Iaşi 2009

Clasa a IX-a

IX.150 Spunem că o mulţime *A* de numere reale strict pozitive are proprietatea *(P)* dacă orice element al său este media geometrică a două elemente distincte ale lui *M.*

a) Arătaţi că există cel puţin 2009 mulţimi care au proprietatea *(P);*
b) Demonstraţi că nu există nicio mulţime cu 2009 elemente şi care are proprietatea *(P).*

Prof. Gabriel Popa, Iaşi

IX.151 Rezolvaţi ecuaţia: $\left[\frac{3x+1}{4}\right] + \left[\frac{3x+3}{4}\right] = \frac{3x+1}{2}$

Prof.Antoanela Buzescu, Caransebeş

IX.152 Arătaţi că în orice triunghi *ABC* dreptunghic în *A* avem inegalitatea: $(AB - AC)^2 (BC^2 + 4AB \cdot AC)^2 \leq 2BC^6$.

Baraj juniori 2009

IX.153 Determinaţi toate funcţiile monotone $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ care satisfac simultan condiţiile:
a) $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$;
b) $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Prof. Aurel Bârsan, Braşov

IX.154 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de gradul al doilea.Arătaţi că numărul elementelor mulţimii $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(f(x)) = x\}$ este diferit de 3.

Concurs Braşov, 2009

IX.155 Fie numerele $x_1, x_2, ..., x_n \in \{-1;1\}$. Dacă $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + ... + x_nx_1 = 0$, arătaţi că numărul *n* este divizibil cu 4.

Concurs A.Haimovici, 2009

IX.156 O tablă de şah 5×5 , cu pătrăţelele colorate alternativ în alb şi negru, are colţurile negre.Pentru fiecare pereche de pătrăţele colorate diferit, se desenează câte un vector cu originea în centrul pătrăţelului negru şi vârful în centrul pătrăţelului alb.

a) Câţi vectori au fost desenaţi ?
b) Calculaţi suma tuturor vectorilor desenaţi.

Concurs A.Haimovici, 2009

IX.157 Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care există o mulţime $A \subset \mathbb{R}$ cu *n* elemente, având proprietatea că: $a(b^3 + 6) \leq b(a^3 + 6)$, $\forall a, b \in A$

Prof.Gheorghe Iurea, Iaşi

IX.158 Fie $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Arătaţi că: $a + b \geq 1 \geq c + d$.

Prof. Gheorghe Iurea, Iaşi

IX.159 Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $n! + 3 \cdot 2^n = 6^{n-2}$.

Concurs Iaşi 2009

Clasa a X-a

X.150 Arătaţi că în orice triunghi dreptunghic are loc inegalitatea

$$\frac{R}{r} \geq 1 + \sqrt{2}$$

OL Arad, 2004

X.151 Rezolvați sistemul de ecuații: $\begin{cases} x+\sin x = y \\ y+\sin y = z \\ z+\sin z = x \end{cases}$

* * *

X.152 Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, este adevărată inegalitatea:

$$\log_{n!}\frac{n+1}{2} > \frac{1}{n}$$

* * *

X.153 Dacă $a_1, a_2, ..., a_{12}$ este o progresie geometrică crescătoare cu termeni pozitivi, demonstrați că: $a_{12} - a_1 \geq 11(a_7 - a_6)$.

* * *

X.154 Rezolvați ecuația: $\log_2{}^2 x + 2x \cdot \log_2 x + x^2 + 3 = 4\log_2 x + 4x$.

Prof. Ruxandra Georgescu, Timişoara

X.155 Determinați numerele naturale $n \geq 3$ cu proprietatea: există numerele naturale distincte $a_1, a_2, ..., a_n$ astfel încât: $a_1! \cdot a_2! \cdot ... \cdot a_{n-1}! = a_n!$

Prof. Bogdan Enescu, Buzău

X.156 Determinați funcțiile $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ cu proprietățile:

a) $f(1) = 2$;

b) $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$, $\forall x, y \in \mathbb{Q}$

Concurs Galați, 2004

X.157 Determinați toate funcțiile de gradul al doilea care transformă intervalele $[0,1]$ şi $[4,5]$ în două intervale care au un singur punct comun şi a căror reuniune este intervalul $[1,9]$

Prof. Cristinel Mortici, Tîrgovişte

X.158 O transformare în jocul de rugby înseamnă trimiterea balonului oval printre două bare verticale, numite buturile *A* şi *B*. Locul în care se aşează balonul în vederea transformării poate fi ales oriunde pe perpendiculara în $C \in AB, C \notin [AB]$, pe linia buturilor *AB*. Pentru a-şi mări şansele de reuşită, executantul loviturii va alege un punct *D* pe această perpendiculară astfel încât unghiul $\measuredangle ADB$ să fie maxim. Dacă $AB = 5{,}6\ m$, $BC = 16{,}9\ m$, iar $B \in (AC)$, calculați distanța *CD*.

Concurs A.Haimovici, 2009

X.159 Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, g(x) = bx + a$. Pentru ce valori ale numerelor reale *a* şi *b*, graficele funcțiilor $f \circ g$ şi $g \circ f$ sunt două drepte paralele distincte?

Concurs A.Haimovici, 2009

Clasa a XI-a

XI.150 O matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se numeşte *nilpotentă* dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^k = O_2$. Arătați că matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ nu este nilpotentă, dar se poate scrie ca o sumă finită de matrice nilpotente distincte.

* * *

XI.151 Determinați numerele naturale *x, y, z* ştiind că triunghiul determinat de punctele $A(x, y), B(y, z), C(z, x)$ are aria egală cu $\frac{3}{2}$, iar centrul de greutate al triunghiului este punctul $G(2,2)$.

OL Caraş – Severin, 2008

XI.152 Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ şi $x_{n+1} = x_n - 3x_n{}^2, \forall n \geq 1$. Arătați că şirul considerat este convergent, precizând limita sa, apoi calculați $\lim_{n\to\infty} n \cdot x_n$.

OL Constanța, 2008

XI.153 Se consideră şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = 2, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}, \forall n \geq 1$.

Arătați că şirul considerat este divergent şi calculați $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{x_n{}^2}$.

OL Galați, 2008

XI.154 Calculați $\lim_{n\to\infty} \cos^2\left(\pi \cdot \sqrt{n^2 + 2n}\right)$

OL Gorj, 2008

XI.155 Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det A = tr(A) = 1$. Determinați câte elemente are mulțimea $\{A^n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

* * *

XI.156 Studiați convergența șirului definit prin $a_1 > 0$ și

$$a_{n+1} = \frac{a_n^{\,2} + 4}{a_n + 2}, \forall n \geq 1$$

* * *

XI.157 Considerăm n atleți care participă la o cursă și α_n numărul posibilităților de a se întocmi clasamentul final (știind că toți participanții termină cursa).

a) Determinați α_3 și α_4;

b) Determinați relația ce permite aflarea valorii numărului α_{10}.

Concurs A.Haimovici, 2009

XI.158 Arătați că există două matrice $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $A^2 + B^2 = I_2$ și matricea $AB - BA$ este inversabilă.

Concurs Iași 2009

XI.159 Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale definit prin $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = \left| x_n - \frac{n}{n+1} \right|, \forall n \geq 1$. Arătați că șirul este divergent.

Prof.Paul Georgescu, Gabriel Popa, Iași

Clasa a XII-a

XII.150 Determinați valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care numărul 41 are un multiplu de forma $\overline{a\underbrace{00...0}_{n\ cifre}b}$, unde *a,b* sunt cifre zecimale nenule.

Prof. Mihai Bălună, București

XII.151 Determinați funcțiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$f(arctgx) = (1 + x^2) f(x)\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Prof. Gabriel Mîrșanu, Iași

XII.152 Patru boxeri vor să-și afle greutatea folosind un cântar care nu poate cântări mai puțin de 100 kg, astfel că urcă pe cântar doi câte doi. Alexandru și Cătălin au împreună 142 kg, Cătălin și Gabriel au împreună 182 kg, Gabriel și Lucian au împreună 184 kg, iar Lucian și Alexandru au împreună 144 kg. Sunt suficiente aceste informații pentru a afla cât cântărește fiecare boxer?

Concurs A.Haimovici, 2009

XII. 153 Se consideră un grup comutativ $(G,\cdot)$ cu cel puțin trei elemente. Fie a și b două elemente distincte ale grupului, diferite de elementul neutru. Determinați funcțiile injective $f : G \to G$ cu proprietatea că: $f\left(af(x)y\right) = bf(xy)$, $\forall x, y \in G$.

Prof. D.M.Bătinețu-Giurgiu, București

XII. 154 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$.

Calculați: a) limitele laterale ale funcției în $x_0 = 0$;

b) limitele laterale ale funcției în $x_0 = -1$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

* * *

XII.155 Se consideră șirul definit prin $a_1 > 0$ și $a_{n+1} = \ln(1 + a_n), \forall n \geq 1$.

a) Calculați limita șirului considerat;

b) Arătați că: $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n = 2$.

Concurs G.Moisil, 2008

XII.156 Demonstrați că dacă $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pentru care $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot f'(x) = 1$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Concurs G.Moisil, 2008

XII.157 Fie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcție derivabilă și F o primitivă a sa pentru care $F(x) = f^2(x) + f(x), \forall x > 0$. Demonstrați că f este strict crescătoare.

OL Buzău, 2008

XII. 158 Fie $(G,\cdot)$ un grup în care aplicațiile $f, g : G \to G$, $f(x) = x^n, g(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ sunt endomorfisme. Arătați că, dacă f este injectivă sau surjectivă, atunci grupul este abelian.

Prof. Gheorghe Andrei, Constanța

XII. 159 Fie $f_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f_a(x) = \frac{arctgx}{x^2 + a}$, $a \in [0, \infty)$.Calculați:

$$I = \int f_0(x)dx,\ J = \int f_1(x)dx,\ K = \int \frac{f_1(x)}{x^2}dx.$$

Prof. Traian Tămâian, Carei

Rubrica rezolvitorilor

Punctaje obținute pentru rezolvarea problemelor din RMCS nr.28
(în paranteză apare punctajul acumulat pentru concursul revistei, ediția a V-a)

Repetăm: ***Respectați, vă rugăm insistent, regulile de expediere a plicurilor cu soluții; în special, indicați pe plic clasa în care sunteți!!!***

Clasa a II-a

Liceul Hercules Băile Herculane(înv.Adriana Laitin, inst. Mirela Bolbotină) Țimbota Alexandru Valentin (89), Petcu Alexandru Egon 200(293), Panduru Liviu Dimitrios 106(195), Blidariu Mihai (94), Grozăvescu Andreea Ana-Maria (91), Bîrlan Florentin (93), Mihalcea Daniel (95), Vlădica Alexandra (95), Staicu Ariana 200(294), Gongu Cristian (84), Cîrdei Bogdan Antonio 100(200), Cionca Flavius Cosmin 100(189), Spătaru Livia Karina 100(100).
Şcoala Bolvaşnița Ştirban George 50(50).
Şcoala Generală 2 Reşița (înv. Florica Boulescu, înv. Mariana Brebenariu) Ciobanu Elena 200(320) – ***scris caligrafic superb*** !!, Racoceanu Rareş 200(200), Maletici Noemi 100(100), Solomon Denisa 196(196).
Şcoala Generală 9 Reşița (inst. Costa Moatăr) Borduz Flavius (89), Voinea Nicoleta (89), Bodnar Emanuela Deborah (92)
Grup şcolar Moldova Nouă (înv. Anastasia Stroia) Răulea Alina (30), Cristea Bianca (97), Irimia Loredana 100(176), Harca George Adrian 60(136), Iacob Andreea (56), Bolohan Andreea 100(100).
Şcoala Generală 1 Oțelu – Roşu (înv. Nicoleta Toader, înv. Nicoleta Doleanu) Janțu Lucian (70), Jebelean Cristiana (74), Boghian Tiberiu (50), Borca Delia Ariana (71), Preda Sebastian (74), Meilă Denic (80), Dobre Alexandra (42), Modîlcă Alin (60), Vețan Denis 100(160), Baderca Flavius (80), Pop Adrian (50).
Liceul Teoretic Gen.Dragalina Oravița (înv.Ildiko Stoenescu, prof. Aurica Lazarov) Lazarov Andrei 240(340).

Clasa a III-a

Liceul Hercules Băile Herculane (inst.Floarea Kuszay, înv.Camelia Staicu, înv. Doina Zah) Mărțuică Ana (98), Laitin Patricia (100), Bolbotină Gabriel 243(495), Susana Denisa (100), Militaru Antonio (100), Jircovici Ana-Maria (100), Agafiței Cristian 223(316), Troacă Andrei 200(363), Agafiței Nichita 223(316), Nicoară Rebeca 200(363), Bocică Cristinel (93), Negoițescu Nicoleta 200(379), Ciobanu Antonia 200(374), Sorescu Valentin 200(382), Dorobanțu Maria 200(385), Stoican Anastasia 200(377), Dancău Maria Ileana 200(385), Roş Maria 210(387)
Şcoala Berzasca (înv. Pîrvu Tatiana) Puia Roxana Emilia 190(190)
Şcoala Bolvaşnița Jura Miriam Iasmina (20)
Şcoala Romul Ladea Oravița (înv. Viorica Totorean, înv. Merima Velcotă, înv.Georgeta Curea) Burcuşel Alex (35), Burulea Alexandru (62), Preda Damir (90), Gherman Oana108(180), Dumitraşcu Bogdan Andrei (75), Scarlat Sara-Giulia 200(275), Buzdug Ionuț 100(176), Niță Cezar (90).
Liceul Teoretic Gen.Dragalina Oravița (înv. Mirela – Ana Nicolaevici) Mărilă Paul 82(161).
Şcoala Generală 2 Reşița (înv. Aurica Nițoiu) Potocean Aura Teodora (96).
Şcoala Generală 8 Reşița (înv. Rodica Moldovan, înv. Corina Nedelcu) Goian Tudor George 93(178), Bruno Kapros 100(180), Nica Elena Lorena (63), Chiseliță Mara 100(183), Badea Elia Cristina (60), Surugiu Dragoş Andrei (68), Ciupici Vlad Mihai Jiva (30), Pătru Ralph Antonio (74), Grema Denis (73), Marin Mădălin 100(162), Pascal Roxana 110(179)*(fiecare problemă pe foaie separată !!!),* Țeperdel Darius 70(135), Duca David 100(100). Ştreng Flavius (65), Cenda Sabina (74)
Şcoala Generală 9 Reşița (înv. Margareta Filip) Jumanca Patricia (232)
Liceul Pedagogic CD Loga Caransebeş (înv. Ion Ritta) Miculescu Andreea (100)
Şcoala Generală 1 Oțelu – Roşu (mama) Buță Jana Adina 224(399)
Şcoala Generală 12 Decebal Craiova, Dolj (inst. Letiția Lungu) Prejbeanu Andreea Cristina 140(240).

Clasa a IV-a

Liceul Hercules Băile Herculane (înv.Maria Daria Puşchiță) Mircea Emilian Golopența (100), Brancu Violeta Petruța (100), Tudor Oana 100(200), Bujancă Georgiana (100), Barbu Cornel (100).
Şcoala Berzasca (înv. Elena Armanca) Bănică Mihai Sebastian (86)
Liceul Traian Doda Caransebeş (înv. Margareta Stefănuți)
Stanciu Ana – Zaira 97(97)
Liceul Pedagogic CD Loga Caransebeş (inst. Mirela Tătar) Boba Bianca (90)
Şcoala Ciclova Română (înv. Ruja Caragea) Mitreanu Andrei – Mihai 100(100)
Şcoala Generală 2 Reşița (înv. Ana Modoran) Velcsov Flavia 300(410), Cioponea Alexandru Mihai (80), Mihai Flavian Andrei 296(396), Gligor Mădălina Georgiana 300(390), Presnescu Bogdan (100), Murariu Dumitru Ciprian 296(396), Bălean Octavian 294(374), Nicola Elena Beatrice 300(410).
Şcoala Generală 9 Reşița (înv. Mariana Mitrică, înv. Angela Adina Belu) Imbrescu Raluca 215(439), Gherasim Daniel (185), Vladu Andrei 302(472), Şoavă Daniel Viorel285(580) , Zaharia Flavia Cristiana 306(604), Remo Denis 226(343), Țigănilă Ionuț Lucian 226(411)..
Şcoala Romul Ladea Oravița (înv. Camelia Suru, înv. Rozalia Arnăutu, prof. Maria Iancu) Borş Maria (98), Şchiopu Alexandra (73), Palade Teodora (83), Budimir Mădălina (98), Caracoancea Timotei (65), Brădeanu Luciana Florentina 174(306), Drugărin Iosmin Ciprian (93), Voin Lavinia 186(229).
Şcoala Rusca Teregova Blaj Petru (100)
Liceul General Dragalina Oravița (înv. Livia Crețu) Clepan Daria Ştefania (30), Negru Sebastian 60(120).

Clasa a V-a

Liceul Hercules Băile Herculane (Inst.Alexa Gaiță, Înv. Doina Zah, Înv.Diana Grozăvescu) Barbu Andrei 40(123), Şulma Patricia 100(200), Barbu Cristian 58(148), Burcin Andreea 100(200), Nicoară Denisa (90), Vătavu-Pepa Călina (90), Ciobanu Romina (98).

Şcoala Berzasca (înv. Ramona Soroceanu) Radovan Iasmina (143), Secobeanu Flavius (60), Bîtea Nadin (76), Mogoşan Rebeca Sara (143), Criste Gabriel (96).
Şcoala Generală nr. 6 Arad (înv. Irina Ciule) Popa Iasmina 170(300)
Şcoala Bolvaşnița (Inst. Mihaela Goanță) Ştirban Simona (20),
Jura Damarius Cătălin (20)
Liceul Traian Doda Caransebeş (înv. Elena Minea, prof. Adrian Dragomir) Szabo Ciprian 100(200).
Liceul Traian Doda Caransebeş(înv. Ileana Petrescu) Marco Mihai (70)
Şcoala Romul Ladea Oravița(înv. Camelia Suru) Balmez Bogdan (100), Simu Victor (50) .
Şcoala Generală 2 Reşița (înv. Elisaveta Vlăduț, prof. Mariana Drăghici, prof. Mirela Rădoi) Popa Radu (30), Mihancea Miruna (90), Lolescu Bogdan (80), Schinteie Eugen (40), Ciucă Mihai (40), Pinte Ana Maria (70), Rădoi Oana 195(285).
Şcoala Generală 9 Reşița (înv. Zora Zecheru) Bălean Vlad (160)
Liceul Gen.Dragalina (înv. Paulina Lăpuşnianu) Smida Mădălina Georgiana 70(70), Braşoveanu Alex Ionuț 100(100).

Clasa a VI-a

Şcoala Generală nr.1 Anina (prof. Marin Constantin Cleşiu)
Goia Ana Maria (40), Lupu Ana (40), Borcean Delia (80), Sîrghie Mădălina (70)
Şcoala Bănia (prof. Iancu Cleşnescu) Andrei Nicu Daniel (90)
Fără mențiune de şcoală: Stroca Andrei (90), Becia Robert 125(300).
Liceul Hercules Băile Herculane (Prof. Constantin Bolbotină) Popa Andrei (196),Cîrdei Alex-Cosmin 135(331), Urzică Ionuț Sorin 294(386),Cernescu Maria 134(326), Moagă Ducu Alecsandru 380(450), Stanciu Ana-Maria 305(501), Stanciu Ani 305(501), Grigorie Denisa Bianca 182(367), Urdeş Florin 285(481), Radu Denisa 304(501), Rădoi Flavius (196), Becia Robert 125(300).
Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Delia Dragomir, Prof. Janet Miuță Bocicariu) Iliescu Alexandru 150(385), Jurescu Ioan Cristian (70), Nistor Răzvan (110), Dodoiu Oana (80), Stoicănescu Petru 90(180), Neagoe Loredana 125(309), Varga Florina (70), Seracin Ciprian 50(110), Oțet Cătălin (30).

Liceul Pedagogic Caransebeş (Prof. Dorina Humiţa,Prof. Mariţa Mirulescu) Semenescu Raluca 100(180), Pelin Anitta 60(90), Nicoară Ioana (70), Zamfir Andreea 90(170), Ambruş Patricia (90).
Grup Şcolar Moldova Nouă(prof.Vasilica Gîdea) Chiriac Bianca 60(120), Petraru Ioana 164(214), Airini Michel 125(225), Căta Alexandra (80), Dărac Alexandra (60), Căluşariu Ana Maria (50).
Şcoala Generală 2 Reşiţa (prof.Marius Şandru) Neaţu Monica 90(190), Ursul Larisa Iasmina (30), Ciobanu Anca 80(130), Vasilovici Camil 20(20).
Şcoala Generală 6 Reşiţa (Prof. Susana Simulescu) Alexa Luana Maria 60(170), Herţanu Denisa (130), Vida Octavian (100).
Şcoala Generală 8 Reşiţa (Prof. Mirela Rădoi) Trica Alissia 57(107), Sanda Mihaela (70), Puşcaşu Simona 108(168), Ştirbu Monica (40), Rus Daniel 157(257).
Şcoala Generală 9 Reşiţa(prof. Irina Avrămescu, prof.Vasile Chiş) Ştefan Andrei Daniel 40(80), Buşoi Natalia 70(120), Boldea Cristina (80), Gaiţă Nadine 195(385), Costea Denis-Loren (200), Anănuţă Adela Marina (120), Ciortan Ionuţ Petru (195), Pupăzan Andreea 50(190), Muscu Dragoş (180), Bochizu Constantin (180).
Liceul Teoretic Traian Lalescu Reşiţa (Prof. Otilia Bejan) Dolot Doina Nicole 170(330).
Şcoala Romul Ladea Oraviţa (Prof.Camelia Pîrvu) Balmez Andrada-Ioana 227(472), Murgu Teodora 200(395), Chirciu Cătălina (120).
Lic. Gen.Dragalina Oraviţa(Prof.Aurica Lazarov) Ţibulca Andrei (60)
Şcoala Generală 1 Oţelu-Roşu (Prof. Heidi Feil) Toader Răzvan (130), Pândici Cristian Andrei (50), Ţolea Loredana Oana (120), Simescu Larisa Geanina (90), Buzzi Cristian Alexandru (248), Opruţ Raul (80), Szatmari Larisa Maria 170(385), Bauer Richard (160), Erdei Dorian Emeric (10)5, Oancea Maria Roxana (60).
Şcoala Generală nr.3 Oţelu-Roşu (Prof. Felicia Boldea, prof.Daniela Suciu) Barbu Lidia 167(287), Micşescu Cristian 70(160), Carp Andreea 142(307), Piess Helmuth 95(155), Drăgan Alexandra Diana (138), Ghercă Sabrina Marinela (116).
Grup Şcolar Oţelu-Roşu (Prof. Adriana Dragomir) Lohan Larisa 60(210) , Creţoiu Ionuţ 60(210).
Şcoala Rusca Teregova (Prof. Sorin Ciucă) Humiţa Ionela (95), Banda Ioan Alexandru Ilia 180(300), Stepanescu Alina Iconia 115(218), Stepanescu Maria 106(284)
Şcoala Vîrciorova (prof. Ioan Liuba) Bănescu Ramona 30(30).

Clasa a VII-a

Liceul Hercules Băile Herculane (Prof. Constantin Bolbotină, prof. Marius Golopenţa) Şandru Ilie Daniel 240(440), Gherghina Liviu 124(294), Török Bogdan 283(433), Mihart Georgiana 280(470), Ferescu Liana 263(448), Croitoru Sabina (140), Domilescu Manuel 270(455), Terfăloagă Ana – Maria 305(479) .
Şcoala Berzasca (Prof. Dana Emilia Schiha) Vulpescu Iulia 210(360), Velicicu Alina Andreea (150), Vîlcu Cosmin (50), Buga Ioana Mihaela 60(60).
Şcoala Bozovici(Prof.Pavel Rîncu) Ruva Mihaela (70).
Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Delia Dragomir) Domăneanţu Octavian 80(210)
Şcoala Ciclova Română (prof. Geta Mîşcoi) Munteanu Andreea 84(84).
Şcoala Generală Dalboşeţ (Prof.Pavel Rîncu) Motorga Eliza Mirela (50)
Gr. Şc. Moldova Nouă(Prof. Zoran Ocanovici)Mereu Mădălina (60)
Şcoala Generală nr. 6 Reşiţa (Prof. Susana Simulescu) Ciulu Miruna Dalila 190(420)
Şcoala Generală 8 Reşiţa (Prof. Mirela Rădoi) Chiru Cristian 68(158), Guia Daniel Petru 56(96).
Şcoala Generală nr. 9 Reşiţa (Prof. Ion Belci,Prof.Irina Avrămescu) Peptan Andrei Valentin 70(230), Pangica Antonio (160), Munteanu Ionuţ Valentin 185(395), Vâlcu Sebastian 100(130), Bercean Bogdan 60(120), Momin Alexandra 80(80) .
Şcoala Romul Ladea Oraviţa (Prof. Mariana Iancu, Prof. Camelia Pîrvu) Gheorghişan Călin (283), Dănilă Mădălina 283(561), Pîrvu Ancuţa Iulia 100(230), Alexa Anca 283(559), Drinceanu Ioana (120),Trăilă Alexandra Iulia (110).
Şcoala Generală 3 Oţelu-Roşu (Prof. Daniela Suciu, Prof. Felicia Boldea) Băilă Cristina 30(70),Românu Nicoleta (80), Barbu Daniel 65(145), Preda Cristina (67), Vladu Alina 40(100), Haba Beatrice (67).
Şcoala Generală 1 Oţelu-Roşu (Prof. Heidi Feil, prof.Anişoara Popa) Ştefănescu Andrei 215(455), Raţ Laura (40), Trica Alexandru (100), Manu Cristina (80), Necşa Adina 60(100), Neagu Alexandra (50), Bidilici Răzvan 60(60).
Grup Şcolar Oţelu-Roşu (Prof. Iulia Cecon) Olaru Ionuţ 50(100), Călău Maria 50(100).
Liceul Pedagogic Caransebeş (Prof. Dorina Humiţa, Prof. Antoanela Buzescu) Bivolaru Iulia Mălina 110(190), Băzăvan Răzvan Alexandru

(30), Băzăvan Oana Cătălina (40), Dinulică Petru Augustin 230(460),Dinulică Septimiu 230(460), Rîcă Anda Elena 100(190), Bogdan Roxana 100(190), Enăşoni Lavinia (700, Nica Hermina (60), Iordache Andreea (30), Popovici Daniel (30), Lala Timotei (60), Jurca Rebeca (50).

Şcoala Rusca Teregova (Prof. Sorin Ciucă) Stepanescu Georgeta (85), Blaj Ioan (95), Moacă Nicolae (62), Gherga Marinela 102(196), Codoşpan Oana (75), Banda Giorgiana Violeta (30), Boşneag Maria – Ionela (85), Driter Ioan (65).

Clasa a VIII-a

Şcoala Anina(Prof. Marin Cleşiu) Paiu Andrada (60), Bardaş Georgiana Flavia (40)
Şcoala Bozovici(Prof. Iosif Găină) Vrancea Andreea (80)
Grup Şcolar Moldova Nouă(Prof. Vasilica Gîdea) Oprea Adelina (70)
Şcoala Generală 2 Reşiţa (Prof. Mariana Drăghici) Ţeudan Adina 80(220), Drăghici Livia Liliana 110(270), Aghescu Monica Elena 70(160).
Şcoala Generală nr. 9 Reşiţa (Prof. Irina Avramescu, Prof.Vasile Chiş, Prof. Ion Belci) Peptan Alexandru 70(190), Lazăr Silviu Ioan 120(240), Popa Ioan Raul 96(96).
Şcoala Generală 1 Oţelu-Roşu (Prof. Heidi Feil, Prof. Anişoara Popa) Pop Cristian Ionuţ (110),Radu Ionela (100), Tuştean Patricia 60(160) Boran Cristian (40), Alexa Alexandra (70).
Şcoala Generală 3 Oţelu-Roşu(prof.Felicia Boldea) Băilă Diana 40(110).
Grup Şcolar Industrial Oţelu-Roşu(Prof. Iulia Cecon) Vărgatu Alina (40), Popescu Ana Maria (40).
Şcoala Rusca Teregova(Prof. Sorin Ciucă) Humiţa Ileana 104(104), Ursulescu Ionela (106), Banda Elisabeta (72), Humiţa Cosmin Vasile 23(23), Stepanescu Georgeta 116(116) (*apare acest nume la mai multe clase!!! Este vorba de aceeaşi elevă sau de eleve diferite cu acelaşi nume? Anunţaţi redacţia !!! Poate că e bine ca, pe viitor, elevii din Rusca Teregova să indice în paranteză şi prenumele ambilor părinţi...)*

Clasa a IX-a

Şcoala Berzasca (Prof. Dana Emilia Schiha) Pătraşcu Alin (60), Dragomir Ionuţ (60)
Grup şcolar Construcţii Maşini Caransebeş (Prof. Carina Corîci) Dumitraşcu Andreea (60)
Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Adrian Dragomir) Stoicănescu Gelu 90(190), Popa Andreea (35)
Şcoala Rusca Teregova (Prof. Sorin Ciucă) Codoşpan Florinela (75), Blaj Marinela (52), Humiţa Maria (85), Milu Ionela (30), Stepanescu Georgeta (106) (???)
Şcoala Generală 1 Oţelu-Roşu (Prof. Heidi Feil), **Grup Scolar Oţelu – Roşu** Krokoş Lorena 80(180),Kuhn Anne Marie (100), Negrei Bianca (100)
Şcoala Vîrciorova, Lic. Traian Doda (Prof. Ioan Liuba, prof. Adrian Dragomir) Măran Marius 40(80).

Clasa a X-a

Liceul Traian Doda Caransebeş(Prof. Delia Dragomir, prof. Lavinia Moatăr) Mocanu Ioana 52(152), Matei Sergiu 50(93), Szabo Cristian (46), Paşăn Petru 103(103).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (prof.Mariţa Mirulescu) Magu Georgiana 42(42).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (Prof. Dorina Humiţa, Prof. Antoanela Buzescu) Semenescu Anca 107(194), Timofte Tina 30(30), Untaru Mădălina 30(30), Berdich Adriana 20(20).
Liceul Tehnologic Nicolae Stoica de Haţeg Mehadia (prof. Mihaela Vasile) Costescu Nicoleta 124(124).
Liceul Traian Lalescu Reşiţa (prof. Ovidiu Bădescu) Nemeş Adina 147(147), Azap Bianca 147(147).
Grup Şcolar Oţelu-Roşu (Prof. Lucian Dragomir) Duma Andrei Florin 34(91), Tuştean Claudiu (17), Buliga Adrian Denis (17), Bugariu Răzvan 23(69).
Liceul Gen.Dragalina Oraviţa (Prof.Mihai Lazarov) Goian Raluca Mădălina (64).

Clasa a XI-a

Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Delia Dragomir, Iacob Didraga) Baneu Petru (47), Zanfir Cristian (148), Bona Petru (42), Prunar Victor (80), Todor Elena 98(205), Galescu Dan 70(130), Ciucă Cristian Sorin 50(50), Stolojescu Petronela 70(70).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş(Prof. Antoanela Buzescu) Marta Marian Sebastian 80(147).
Liceul Traian Lalescu Reşiţa (Prof. Ovidiu Bădescu) Meşter Sergiu 89(154)
Grup Şcolar Industrial Oţelu-Roşu(Prof. Lucian Dragomir) Cococeanu Oana 63(153), Atinge Carina 86(86).
Liceul Gen.Dragalina Oraviţa(Prof.Mihai Lazarov)Pricop Romina 60(100).
Grup Şcolar Moldova Nouă (Prof. Lăcrimioara Ziman) Istudor Deian (57), Vireanu Adelina (20), Calotă Bianca (28), Radoicovici Iasmina (20), Harabagiu Dragana Gabriela (20), Pucă Alexandra Elena (20), Mina Nenad Neşa(20).

Clasa a XII-a

Colegiul Naţional Moise Nicoară Arad (Prof. Ovidiu Bodrogeanu) Adina Vlad (60)
Liceul Tata Oancea Bocşa (Prof.Ioan Todor) Stăniloiu Ovidiu 80(200)
Liceul Hercules Băile Herculane(Prof.Constantin Bolbotină) Stolojescu Anca (115).
Liceul Pedagogic C.D.Loga Caransebeş (Prof. Antoanela Buzescu) Mureşan Ana-Maria 50(100), Mureşan Alexandru Ioan 50(100).
Liceul Traian Doda Caransebeş (Prof. Lavinia Moatăr, Prof. Iacob Didraga) Bălulescu Bianca Veronica (30), Aghescu Alina Mihaela (30), Turnea Ana-Maria (30), Firan Maria – Mirabela (30), Train Anca 30(30), Dozsa Cecilia 30(30).
Grup Şcolar Industrial Oţelu-Roşu (Prof. Lucian Dragomir) Bugariu Dan 36(76), Damian Raluca (30).